Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen **Année Universitaire 2019-2020**
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

1ère Année LMD Mathématique et Informatique Algèbre 2

Cours et TD sur : Les applications linéaires

Dans tout ce qui suit E et F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Définition .1 *Soit T une application de E dans F. On dit que T est linéaire si et seulement si :*

— $\forall u, v \in E : T(u+v) = T(u) + T(v)$.

— $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K} : T(\lambda u) = \lambda T(u)$.

Cette définition est équivalente à :

Définition .2 *T de E dans F est dite linéaire si est seulement si :*

$$\forall u, v \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} : T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v).$$

Remarque .1

1. *Si E est de dimension finie et si $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ est une base de E alors*

$$\forall u \in E : u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \text{ et } T(v) = T(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(v_i),$$

c'est à dire que T est entièrement déterminée si on connait les images par T de la base donnée.

2. *Si T de E dans E linéaire alors T est un endomorphisme.*

3. *Si T de E dans F linéaire et bijective alors T est un isomorphisme.*

4. *T de E dans E linéaire et bijective alors T est un automorphisme.*

5. *T de E dans $\mathbb{K}$ linéaire alors T est une forme linéaire.*

Exemple .1 *$T : E \longrightarrow F$ une application définie par $T(x) = x$ (application identité). T est linéaire. En effet, soit $x_1, x_2 \in E$ et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$:*

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2).$$

Exemple .2 *$T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ une application définie par $T(x,y) = (x+y, x-y)$. T est linéaire. En effet, soit $u = (x,y), v = (x', y') \in \mathbb{R}^2$ et soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:*

$$T(\alpha u + \beta v) = T(\alpha(x,y) + \beta(x',y')) = T(\alpha x + \beta x', \alpha y + \beta y').$$
$$= (\alpha x + \beta x' + \alpha y + \beta y', \alpha x + \beta x' - \alpha y - \beta y').$$

$$
\begin{aligned}
&= (\alpha(x+y)+\beta(x'+y'),\alpha(x-y)+\beta(x'-y')).\\
&= (\alpha(x+y),\alpha(x-y))+(\beta(x'+y'),\beta(x'-y')).\\
&= \alpha(x+y,x-y)+\beta(x'+y',x'-y').\\
&= \alpha f(x,y)+\beta f(x',y')=\alpha T(u)+\beta T(v).
\end{aligned}
$$

Proposition .1 *Si T de E dans F une application linéaire alors :*

1. $\forall u \in E : T(-u) = -T(u)$.

2. $T(0_E) = 0_F$.

Définition .3 *Soit $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On appelle noyau de T l'ensemble noté $kerT$ défini par*

$$kerT = \{u \in E;\ T(u) = 0_F\}.$$

Définition .4 *Soit $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On appelle image de T l'ensemble noté ImT défini par*

$$ImT = \{v \in F;\ v = \ T(u)\ \text{avec}\ u \in E\} = T(E).$$

Proposition .2 *Soit $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire, alors $kerT$ est un s.e.v. de E, et ImT est un s.e.v. de F.*

Proposition .3 *Soit $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors :*

1. *L'image par T de tout s.e.v de E est un s.e.v de F.*
2. *L'image réciproque par T de tout s.e.v de F est un s.e.v de E.*

Théorème .1 *Soit $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire, alors*

$$T\ \text{est injective} \Longleftrightarrow kerT = \{0_E\}.$$

Théorème .2 *Soit $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire alors*

$$T\ \text{est surjective} \Longleftrightarrow ImT = F.$$

Théorème .3 *Soit $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire, avec $dimE = n$ (finie) alors*

$$dimE = dimkerT + dimImT.$$

Proposition .4 *Si $T : E \longrightarrow F$ est linéaire et $dimE = dimF = n$ alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- *T est bijective.*
- *T est injective.*
- *T est surjective.*

Le Théorème Noyau-Image implique :

Proposition .5 *Si $T : E \longrightarrow F$ est linéaire et E est de dimension finie n alors :*

1. *T est injective si et seulement si l'image par T de toute famille libre dans E est une famille libre dans F.*
2. *T est surjective si et seulement si l'image par T de toute famille génératrice dans E est une famille génératrice dans F.*

1 Rang d'une application linéaire

Définition .5 *Soit $T : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On appelle rang de T la dimension de ImT. On le note*

$$rgT = dimImT = dimT(E).$$

Remarque .2 *Si $\mathcal{B}$ est une base de E alors le rang de T est le nombre de vecteurs linéairement indépendants dans $T(\mathcal{B})$ l'image par T de la base $\mathcal{B}$.*

2 Opérations sur les applications linéaires

Définition .6 *L'ensemble des applications linéaires de E dans F est notée $\mathcal{L}(E, F)$.*
On munit $\mathcal{L}(E, F)$ de l'addition des fonctions et la multiplication par un scalaire comme suit :

$$\forall x \in E : (f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

et

$$\forall x \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R} : (\alpha f)(x) = \alpha f(x).$$

Alors :

Proposition .6 *$\mathcal{L}(E, F)$ munit de l'addition et de la multiplication a une structure d'espace vectoriel.*

Exercices

Exercice 1 :
Les applications suivantes de E dans F sont elles linéaires ? Si oui, déterminer une base du noyau et une base de l'image.
1. $E = F = \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = (2x + 3y, x)$.
2. $E = F = \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = (y, x + y + 1)$.
3. $E = \mathbb{R}^3, F = \mathbb{R}, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = x + 2y + z$.
4. $E = F = \mathbb{R}^2, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = (x + y, xy)$.
5. $E = F = \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : f(x) = x^2$.
Exercice 2 :
Donner dans chaque cas la dimension du noyau de f, puis le rang de f.
L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (y, z, x)$.
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x + y, y + z, x - z)$.
3. $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^4, f(x, y, z) = (x + y + z)(1, i, -1, i)$.
4. $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^4, f(x, y) = (x - y, x + iy, (2 + i)x + y, 3ix + y)$.
5. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (2x + my - z, 2x + 2y, x - 2z)$, selon la valeur du paramètre réel m.
Exercice 3 :
Soit $\mathbb{R}_4[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 4.
Montrer que l'application f de $\mathbb{R}_4[X]$ dans lui même, définie par $f(P) = P - P'$ est linéaire.
L'application f est-elle injective ? surjective ?
Exercice 4 :

Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (-x + 2y + z, y + 3z, 2x - 2y + 4z)$.
a. Donner une base de l'image et une base du noyau de f. Décrire l'image de f par un système d'équations linéaires.
b. Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x = y$. Quelle est la dimension de E ? Donner une base de $f(E)$ et une base de $f^{-1}(E)$.

Exercice 5 :

Soit $f : \mathbb{R}_{n+1}[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $f(P) = (n+1)P - XP'$.
1. Justifier que f est bien définie et que c'est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de f.
3. Montrer que f est surjective.

Exercice 6 : *(SUPP)*

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans F. Montrer que f est un isomorphisme si et seulement si l'image par f de toute base de E est une base de F.

Exercice 7 : *(SUPP)*

Soient E un espace vectoriel réel de dimension 3, (e_1, e_2, e_3) une base de E et λ un réel.
Montrer que les relations $f_\lambda(e_1) = e_1 + e_2, f_\lambda(e_2) = e_1 - e_2$, et $f_\lambda(e_3) = e_1 + \lambda e_3$, définissent une application linéaire f_λ de E dans E.
Comment choisir λ pour que f_λ soit injective ? surjective ?

Références

---

1. Algèbre, Cours de Mathématiques pour la première année , site web : http ://exo7.emath.fr/
2. Algèbre linéaire, 5e édition, de Joseph Grifone.
3. Le succès en algèbre en fiches-méthodes : 1re année, de Abdelaziz El Kaabouchi.

Auteur

M. Mamchaoui

Laboratoire de Statistiques et Modélisation Aléatoires (LSMA). Faculté des Sciences. Université Abou Bakr Belkaïd, Tlemcen, BP 119, 13000 Tlemcen, Algérie.
mohamed.mamchaoui@univ-tlemcen.dz