Département de Mathématiques
Master edp et applications A.U 2019/2020
Méthodes de résolution des pbs elliptiques

Exercices
Méthodes Variationnelles

Exercice1

Soient V un espace de Banach, a une forme bilinéaire symétrique continue sur $V \times V$ et L une forme linéaire continue sur V . On pose

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u;u) - L(u)$$

1. Montrer que J est dérivable sur V et que

$$\langle J\prime(u); w\rangle = a(u;w) - L(w) \quad \text{pour tout } u; w \in V$$

2. Montrer que J est deux fois dérivable sur V et que

$$J"(u)(v;w) = a(v;w) \text{ pour tout } u; v; w \in V$$

Exercice2

Soient K un convexe fermé non vide de V , a une forme bilinéaire symétrique continue coercive sur $V \times V$ et L une forme linéaire continue sur V .

1. Montrer que

$$\frac{1}{2}a(v,v) - Lv$$

admet un unique point de minimum dans K, noté u.

2. Montrer que u est aussi l'unique solution du probème (appelé inéquation variationnelle)

$$u \in K \text{ et } a(u; v-u) \geq L(v-u); \forall v \in K$$

Exercice3

Objectif de l'exercice: Etude de la première valeur propre du Laplacien dans Ω un domaine borné . Pour cela, on introduit le problème de minimisation de la fonctionnelle J sur K,

$$K = \left\{ v \in H_0^1(\Omega), \|v\|_{L^2(\Omega)} = 1 \right\}$$

$$J(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$$

1. Montrer que ce problème admet un minimum
   indication: montre que K est compact pour les suites minimisantes à l'aide du Théorème de Rellich.
2. Ecrire l'équation d'Euler de ce problème
3. En déduire que la valeur du minimum est bien la première valeur propre et que les points de minimum sont des vecteurs propres associés.

Exercice4

Soit $f \in L^2(\Omega)$,Ω ouvert borné . Pour $\varepsilon > 0$,on considère le problème de régularisation suivant

$$\min_{u \in H_0^1(\Omega)\ \|u-f\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$$

1. Montrer que ce problème admet une unique solution u_ε.
2. Montrer que, soit $u_\varepsilon = 0$, soit il existe $\lambda > 0$ tel que u_ε est solution de

$$\begin{array}{c} -\Delta u_\varepsilon + \lambda (u_\varepsilon - f) = 0 \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array}$$

Exercice5

Soit A une matrice réelle d'ordre $p \times n$ et $b \in \mathbb{R}^p$. On considère le problème "aux moindres carrés"

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^N} \|Ax - b\|^2$$

Montrer que ce problème admet toujours une solution et écrire l'équation d'Euler correspondante.

Exercice6

Soit A une matrice symétrique d'ordre n et $J(x) = Ax.x$. Montrer que les points de minimum de J sur la sphère unité sont des vecteurs propres de A associés à la plus petite valeur propre.

Exercice supplémentaire

Soient Ω un ouvert borné, K un compact connexe de $\mathbb{R}^N$ inclus dans Ω tel que Ω / K est régulier et $f \in L^2(\Omega)$. On considère le problème

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{dans } \Omega / K \\ u = C & \text{sur } \partial\Omega \\ \displaystyle\int_{\partial K} \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0 & \text{sur } \partial K \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

où C est une constante inconnue à déterminer. Trouver une formulation variationnelle de ce problème aux limites et démontrer l'existence et l'unicité d'une solution $(u; C)$.

—————————————————————————————

\+ Exercices figurant sur le cours.