نظرية الاحتمالات:

تمهيد: نظرية الاحتمالات هي فرع من فروع الرياضيات، يدرس الاتجاه العام للظواهر العرضية (العشوائية)، ويهتم بدراسة تأثير الصدفة على الظواهر والأشياء وتلعب هذه النظرية دوراً مهماً في ~~العلوم~~ حياتنا اليومية خاصة عند التنبؤ بإمكانية وقوع حدث ما، كما تلعب دوراً هاماً في مختلف العلوم، خاصة العلوم الاقتصادية، والعلوم الصحية والحياة ...

* لقد بدأت دراسة الاحتمالات في القرن 17 في أوروبا على موائد القمار، ولكنها انتشرت وأصبحت ضرورة لا غنى عنها في كافة فروع المعرفة.

مفاهيم أساسية:

$\boxed{1}$ التجربة ~~العشوائية~~: تعد التجربة من أهم المفاهيم في نظرية الاحتمالات وهي تقوم على أساس التأكد من تحقق أو حصول بعض الظروف المشتركة لظاهرة ما (هي تلك الظروف من صنع الإنسان أو وليدة الصدفة) ومن أمثلة ذلك:

- قذف قطعة نقد في الهواء وملاحظة الوجه الذي سيظهر (الصورة أو الرقم) pile face Pièce de monnaie
- قذف زهرة النرد le Dé
- تسجيل كمية التساقط في منطقة معينة

وتنقسم التجربة إلى: une expérience / Epreuve

1-1 / التجربة النظامية: هي كل تجربة يمكن توقع أو تحديد نتائجها سلفاً على أساس قوانين ~~علمية~~ معروفة، انطلاقاً من جملة من الشروط، بمعنى إذا تكررت التجربة تحت نفس الظروف فمن المؤكد ملاحظة نفس النتائج مثال إلقاء تفاحة في الهواء فإنه لابد أن تسقط على الأرض.

← وهذا النوع من التجارب نجده كثيراً في العلوم الدقيقة (كالفيزياء، الكيمياء ...)

1-2 / التجربة العشوائية (الاحتمالية): هي كل تجربة يمكن تكرارها أو تكون قابلة للتكرار، وتكون نتائجها غير محددة سلفاً (مسبقاً) لكونها تعتمد على الصدفة أو العشوائية رغم انطلاقها من نفس الشروط. بمعنى آخر هي كل إجراء نعلم مسبقاً جميع النتائج الممكنة له، لكن لا نستطيع التنبؤ أي من هذه النتائج ستتحقق مثال إلقاء قطعة نقد

2 فضاء العينة : أو فراغ العينة espace fondamental (أو فضاء النواتج)

هو مجموعة النتائج الممكنة للتجربة العشوائية أو جميع المشاهدات التي يمكن الحصول عليها عند اجراء تجربة ما ويرمز لفضاء العينة بـ Ω

~~XXXXXX~~ ويمكن أن يكون فضاء العينة منتهٍ (عدد محدود من الإمكانات) وقد يكون غير منتهٍ (عدد غير محدود من الإمكانات)

{Pile a face}

مثال : عند رمي قطعة نقدية فضاء العينة يتكون من امكانيتين {صورة، رقم} = Ω

" " زهرة (حجر) نرد le Dé

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

3 الحادث وأنواعه événement : الحادث هو عبارة عن مجموعة جزئية من فضاء العينة أي هو النتيجة أو النتائج المحددة من النتائج الممكنة لتجربة ما ويمكن أن نميز بعض الأنواع من الحوادث.

3-1/ حادث بسيط (أولي) : مؤلف من مشاهدة واحدة أو نتيجة واحدة أو عنصر واحد فقط (لا يمكن تجزئة الحادث البسيط).

3-2/ حادث مركب : مؤلف من أكثر من مشاهدة أو نتيجة أو عنصر.

3-3/ الحادث المستحيل : الذي لا يحتوي على أي عنصر أو غير قابل للتحقق أبدا

الحادث المستحيل هو المجموعة الخالية، والمجموعة الخالية جزئية من أي مجموعة. $\phi \subset \Omega$ مثال: الحصول على الرقم 8 عند رمي حجر النرد

3-4/ الحادث المؤكد : هو الحادث الذي يتحقق مؤكدا، وبالتالي فهو حادث يحوي جميع الحوادث البسيطة المرتبطة بالتجربة مثال: الحصول على صورة أو رقم عند رمي قطعة نقدية.

3-5/ الحادث المتمم، المعاكس، المكمل : لكل حادث A مرتبط بالفضاء Ω متمم يتكون من مجموعة الامكانات الغير محققة لـ A ونرمز له بالرمز $\bar{A}$

$$\bar{A} = \{x \mid x \in \Omega ; x \notin A\} \qquad \bar{A} = \Omega - A$$

3-6/ الحوادث المتنافية والغير متنافية : الحوادث المتنافية هي تلك الحوادث التي لا يمكن وقوعها في آن واحد، بحيث وقوع أحدها يمنع وقوع الآخر، هذا يعني أن تقاطعهما يعطينا ϕ

مثال: رمي قطعة النقد، ظهور الصورة يمنع ظهور الرقم $P \cap F = \phi$

إذا يمكن القول أن جميع الحوادث البسيطة لتجربة محددة متنافية مثنى مثنى

أما الحوادث الغير متنافية، فهي عكس الحوادث المتنافية بمعنى أن حدوث الحادث الأول لا يمنع حدوث الحادث الثاني، تقاطعهما يختلف عن $\emptyset$

مثال: عند رمي حجر نرد مرة واحدة، حادث ظهور عدد زوجي أو عدد أصغر من 3

- الأعداد الزوجية 2، 4، 6
- الأعداد الأصغر من 3 : 1، 2

تقاطعهما يعطينا $\{2\}$.

3-7/ الحوادث المستقلة و الغير مستقلة والشرطية: يقال أن الحوادث مستقلة إذا كان وقوع أحدها لا يؤثر و لا يتأثر بوقوع الحادث الآخر، فنتائج عدة رميات متعاقبة لقطعة نرد تمثل حوادث مستقلة عن بعضها.

أما إذا كان وقوع حادث ما يؤثر في وقوع حادث آخر فنكون بصدد حوادث غير مستقلة

مثال: نسحب كرة عشوائيا من كيس به 10 كرات دون إعادتها، ثم نسحب كرة ثانية. عند القيام بالسحبة الأولى دون الإرجاع (دون إعادة الكرة في الكيس) العدد ينقص بحيث عند السحبة الثانية يكون عدد الكرات في الكيس 9 وبالتالي السحبة الأولى أثرت على الثانية إذن الحادثان غير مستقلان

ملاحظة: عند السحب مع الإرجاع الحدثان مستقلان
عند السحب بدون إرجاع " غير مستقلان.

~~الحوادث المشروطة~~: إذا كان حادث ما مرتبط بتحقق أو عدم تحقق حدوث حادث آخر نقول عن هذا الأخير أنه حادث شرطي ونسمي هذا النوع من الحوادث بالحوادث الشرطية.

3-8/ الحوادث المنتظمة: هي الحوادث المتساوية في احتمالاتها، ففي تجربة إلقاء حجر النرد مرة واحدة تكون الاحتمالات متساوية لكل الأرقام.

3-9/ الحوادث الملائمة والحوادث الممكنة: عند القيام بتجربة ما، نرجوا وقوع أو الحصول على حدث ما، هذا الأخير يسمى بالحادث الملائم، لكننا قد يحدث ما لا نرجوا إليه، وهو الحادث المتمم لما نرجوه ومجموعهما (أي ما نرجوه و ما لا نرجوه) أي الملائم والمتمم يشكل ما يسمى بالحوادث الممكنة.

$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$

- تعريف الاحتمال: احتمال الحادث A هو مقياس عددي يرمز له P(A) ولقيس فرصة وقوع الحادث A عند أجراء التجربة، وتتراوح قيمة المقياس بين الواحد والصفر. نعني ~~بظهور~~ احتمال ~~وقوع~~ ظهور الحادث A اثناء تجربة عشوائية ما، يكون مساويا الى النسبة بين عدد الحوادث الملائمة للظاهرة قيد الدراسة إلى عدد الحوادث الممكنة.

أي إذا كان m عدد الحالات الملائمة للحادث A، و n هو عدد حالاته الممكنة فان احتمال وقوع الحادث A ~~P(A)~~ يكون وفق العلاقة التالية

$$P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة للحادث (A)}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} \qquad P(A) = \frac{m}{n} \quad \text{بحيث} \quad 1 \geq m \geq n$$

$P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$

~~تنحصر قيمة الاحتمال بين 0 و 1~~ ~~$1 \geq P(A) \geq 0$~~ ~~يمثل الصفر (0) الاحتمال المستحيل~~ ~~الواحد (1) المؤكد~~

والشرط الأساسي في ذلك هو أن يكون لكل الحوادث نفس الحظ في الظهور (الوقوع)

مثال: نرمي قطعة نرد مرة واحدة،

ما هو احتمال الحصول على عدد زوجي؟

- فضاء الحوادث $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- الحوادث الملائمة $m = \{2, 4, 6\}$ عدد الحالات الملائمة $\underline{3}$

- الحوادث الممكنة $n = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ عدد الحالات الممكنة هو $\underline{6}$.

احتمال الحصول على عدد زوجي هو $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

~~خصائص الاحتمال:~~

- ~~الاحتمال قيمة عددية موجبة دائما. $P(A) \geq 0$ ومحصور بين 0 و 1 $1 \geq P(A) \geq 0$~~

- ~~يمثل الصفر (0) الاحتمال المستحيل~~

- ~~" الواحد (1) " الأكيد~~

- ~~إذا كان $\bar{A}$ حادث متمم لـ A فإن~~

~~$$P(A) + P(\bar{A}) = P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$$~~
~~$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$~~

$\boxed{1 \geq P(A) \geq 0}$

قوانين الاحتمال: مسلمات (بديهيات) الاحتمال:

- يرافق كل حادث A عدد حقيقي $P(A)$ يسمى إحتمال A ويحقق $P(A) \geq 0$
- الاحتمال الأكيد يساوي 1 $\quad P(\Omega) = 1$
- " " المستحيل يساوي 0 .
- إذا كان A و B حادثان متنافيان: بمعنى $A \cap B = \emptyset$ فإن

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- إذا كان A و B حادثان غير متنافيان بمعنى $A \cap B \neq \emptyset$ فإن

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

- إذا كانت $\overline{A}$ مكملة (متممة) الحادث A فإن

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

وهذا يعني أن إحتمال وقوع الحادث + إحتمال عدم وقوعه = 1

$$P(\overline{A}) + P(A) = 1$$

- لأي حادث A

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- إذا كان الحادث A لا يعتمد ولا يتأثر بوقوع أو عدم وقوع الحادث B فإن الحادثين A و B مستقلان ويكون

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

- لأي حادثان A و B يكون

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$
$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

مثال توضيحي:

إذا كان احتمال نجاح محمد في مقرر الاحصاء يساوي 0,6 فاوجد احتمال رسوبه

الحل:

$$P(A)=0{,}6 \Longleftarrow \quad A = \{\text{نجاح محمد في مقرر الاحصاء}\}$$

$$\overline{A} = \{\text{رسوب محمد في مقرر الاحصاء}\}$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$$

$$\boxed{P(\overline{A}) = 0{,}4}$$

مثال: إذا كان احتمال نجاح محمد في أحد الاختبارات يساوي 0,6 واحتمال نجاح محمد واحمد معا في هذا الاختبار يساوي 0,1، فاوجد احتمال نجاح محمد ورسوب أحمد

الحل: نعرف الحوادث التالية

$$A = \{\text{نجاح محمد في الاختبار}\} \qquad B = \{\text{نجاح أحمد في الاختبار}\}$$

$$\overline{A} = \{\text{رسوب محمد في الاختبار}\} \qquad \overline{B} = \{\text{رسوب أحمد في الاختبار}\}$$

$$A \cap B = \{\text{نجاح محمد وأحمد معا في الاختبار}\}$$

$$A \cap \overline{B} = \{\text{نجاح محمد ورسوب أحمد}\}$$

$$P(A)=0{,}6$$

$P(A\cap B)=0{,}1$ المطلوب $P(A\cap\overline{B})$

$$P(A\cap\overline{B}) = P(A) - P(A\cap B)$$
$$= 0{,}6 - 0{,}1$$

$$\boxed{P(A\cap\overline{B}) = 0{,}5}$$

تمرين: مثال تجربة إلقاء (رمي) حجرتي نرد ،

حدد فضاء العينة Ω و احتمالات الحوادث البسيطة

- يعرف الحادث A بأنه الحصول على رقم متساوي على وجهي حجرتي النرد
أوجد $P(A)$

- يعرف الحادث B بأنه الحصول على الرقم واحد على وجه حجرة النرد الأولى .
أوجد $P(B)$

- عرف الحوادث التالية : $(A\cap B)$ ، $(A\cup B)$ ثم أوجد احتمالاتها

الحل

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

عدد الحالات الممكنة

$$\Omega = \{(1,1),(1,2)(1,3)(1,4),(1,5)(1,6),(2,1)(2,2)\text{------}\ \text{-------}(6,6)\}$$

حساب احتمالات الحوادث البسيطة

$$P_i = \frac{\text{الحالات الملائمة}}{\text{الحالات الممكنة}}$$

$$P_i = \frac{1}{36}$$

$$P(\Omega) = \frac{36}{36} = 1$$

$$A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\}$$

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$(A\cap B) = \{(1,1)\} \qquad P(A\cap B) = \frac{1}{36}$$

$$(A\cup B) = \{(1,1)(1,2)(1,3)(1,4)(1,5)(1,6)(2,2),(3,3)(4,4)(5,5)(6,6)\} \qquad P(A\cup B) = \frac{11}{36}$$

تمرين : لدينا صندوق به 40 كرة من نفس اللون والحجم، ومرقمة الكرات من 1 إلى 40 ، سحبنا كرة واحدة .

المطلوب :

- ماهو احتمال أن تكون الكرة المسحوبة تحمل رقماً من مضاعفات 4 (الحادث A)
- " " " " " " " " 5 (الحادث B)
- " " " " " " " " 4 و 5
- " " " " " " " " 4 أو 5 .

الحل :

عدد الحالات الممكنة هو 40

- مضاعفات العدد 4 هي الحالات الملائمة للحادث A

$$A = \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40\}$$

$$P(A) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

- مضاعفات العدد 5 هي الحالات الملائمة للحادث B

$$B = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40\}$$

$$P(B) = \frac{8}{40} = \frac{1}{5} = 0{,}20$$

- احتمال وقوع الحادثين معاً أي $A \cap B$

$$(A \cap B) = \{20, 40\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{40} = \frac{1}{20} = 0{,}05$$

- احتمال وقوع الحادث A أو الحادث B أي $A \cup B$

$$A \cup B = \{4, 5, 8, 10, 12, 15, 16, 20, 24, 25, 28, 30, 32, 35, 36, 40\}$$

$$P(A \cup B) = \frac{16}{40} = \frac{2}{5}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{10}{40} + \frac{8}{40} - \frac{2}{40}$$

$$P(A \cup B) = \frac{16}{40}$$

تمرين : إحتمال فصيلة دم أحد المتبرعين بالدم تكون من النوع A هو 0,35

و احتمال أن هذا المتبرع مصاب بضغط الدم هو 0,15 ، إحتمال أن هذا المتبرع مصاب بضغط الدم أو أن فصيلة دمه من النوع A هو 0,40

أوجد إحتمال أن هذا المتبرع :

1- مصاب بضغط الدم و فصيلة دمه من النوع A .

2- غير مصاب بضغط الدم .

الحل : نعرف الحادثتين : A : فصيلة دم المتبرع من النوع A .

B : المتبرع مصاب بضغط الدم .

إذا $P(A) = 0,35$ ، $P(B) = 0,15$ ، $P(A \cup B) = 0,40$

1- إحتمال أن يكون المتبرع مصاب بضغط الدم و فصيلة دمه من النوع A هو

$$\boxed{P(A \cap B)} = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$= 0,35 + 0,15 - 0,40$$

$$\boxed{P(A \cap B) = 0,10}$$

2- إحتمال أن يكون المتبرع غير مصاب بضغط الدم $P(\overline{B})$

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B)$$

$$= 1 - 0,15$$

$$\boxed{P(\overline{B}) = 0,85}$$

تمرين : إذا كان احتمال نجاح محمد في أحد الاختبارات يساوي 0,25 و
إحتمال رسوب أحمد في هذا الاختبار هو 0,3 واحتمال نجاح محمد
وأحمد معاً في هذا الامتحان يساوي 0,1 .
أوجد إحتمال نجاح أحدهما على الأقل .

الحل : لنعرف الحوادث التالية

$A =$ نجاح محمد $\quad \overline{A} =$ رسوب محمد

$B =$ نجاح أحمد $\quad \overline{B} =$ رسوب أحمد

$A \cap B =$ نجاح محمد وأحمد معاً

نجاح أحدهما على الأقل معناه نجاح أحمد أو نجاح محمد
يعني ذلك ~~تقاطع~~ إتحاد A و B

$A \cup B =$ نجاح أحدهما على الأقل = نجاح محمد أو أحمد

لدينا : $P(A) = 0,25$ ، $P(\overline{B}) = 0,3$ ، $P(A \cap B) = 0,1$

$$P(B) = 1 - P(\overline{B})$$
$$= 1 - 0,3$$
$$P(B) = 0,7$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0,25 + 0,7 - 0,1$$
$$\boxed{P(A \cup B) = 0,85}$$

تمرين : يوجد عدد من المرضى في مستشفى متخصص في معالجة الأمراض الرئوية . إحتمال أن يكون المريض المختار بطريقة عشوائية يعاني من السل $P(T)=0{,}7$

وإحتمال أن يكون يعاني من الربو $P(A)=0{,}5$

- هل يوجد في المستشفى أشخاص مصابون بالسل والربو في نفس الوقت ؟

الحل :

$$P(A)=0{,}50 \quad , \quad P(T)=0{,}70$$

$$P(A\cap T)=?$$

حالة التنافي $A\cap B=\phi$

حالة عدم التنافي $A\cap B\neq\phi$

$$P(A\cup T)=P(A)+P(T) \longrightarrow \text{حالة تنافي}$$

$$=0{,}50+0{,}70$$

$P(A\cup T)=1{,}2$ هذا يعني أنه يوجد أشخاص مصابين بمرض السل ومرض الربو في آن واحد وبالتالي

$$P(A\cup T)=P(A)+P(T)-P(A\cap T) \rightarrow \text{حالة عدم التنافي}$$

إذا كان $P(\Omega)=P(A\cup T)$

$$P(A\cup T)=P(A)+P(T)-P(A\cap T)$$

$$1=0{,}5+0{,}7-P(A\cap T)$$

$$P(A\cap T)=-1+0{,}5+0{,}7$$

$$\boxed{P(A\cap T)=0{,}2}$$

إحتمال أن يكون هناك أشخاص مصابين بالربو والسل معا هو 0,2