الاحتمال الشرطي :

ليكن A و B حادثتين معرفين على نفس فضاء العينة Ω ؛ بحيث $P(A)\neq 0$
اذا كان ظهور الحادث B مرتبط بظهور الحادث A نسمي هذا الاحتمال بالاحتمال الشرطي ونرمز له بالرمز $P(B/A)$ ، ونقرؤه كما يلي : الاحتمال الشرطي للحادث B بشرط ~~[illegible]~~ حدوث A مسبقا او علما أن الحادث A قد وقع .
ونحسبها وفق العلاقة التالية

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \quad , \quad P(A)>0$$

- الاحتمال الشرطي للحادث A علما أن B قد وقع

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad , \quad P(B)>0$$

- بشكل عام فإن :

$$P(B/A)\neq P(A/B)$$

- الاحتمال الشرطي لمتممة $\bar{A}$ مع العلم أن B قد وقع يمكن حسابه كالتالي :

$$P(\bar{A}/B)=1-P(A/B)$$

- قاعدة الضرب في الاحتمال

$$P(A\cap B)=P(A)\,.\,P(B/A)$$

$$P(A\cap B)=P(B)\,.\,P(A/B)$$

- يمكن كتابة قانون الاحتمال الشرطي للحادث B علما أن A قد وقع بالشكل التالي :

$$P(A\cap B)=P(A)\,.\,P(B/A)$$

وهذا القانون يسمى بقانون ضرب الاحتمال .

مثال : يتعلق الجدول التالي بـ 400 شخص حسب عادة المدخنين و مستوى ضغط الدم.

مستوى ضغط الدم	عادة التدخين: يدخن D	عادة التدخين: لا يدخن $\bar{D}$	المجموع
مرتفع A	40	10	50
متوسط B	70	130	200
منخفض C	55	95	150
المجموع	165	235	400

وتكون التجربة هي اختيار أحد هؤلاء الأشخاص بشكل عشوائي.

ولنعرف الحوادث التالية:

A : حادث اختيار شخص ضغط دمه مرتفع

D : " " " مدخن

المطلوب : ما هو احتمال أن يكون الشخص المختار:

1- ضغط دمه مرتفع.

2- " مدخن

3- ضغط دمه مرتفع ومدخن.

4- " " " علماً بأنه مدخن.

الحل : عدد الحالات الممكنة $\Omega = 400$ وهي متساوية الفرص.

1- احتمال أن يكون الشخص المختار ضغط دمه مرتفع $P(A)$.

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{50}{400} = \frac{1}{8} = 0,125$$

2- احتمال أن يكون الشخص المختار مدخنا $P(D)$

$$P(D) = \frac{m}{n} = \frac{165}{400} = \frac{33}{80} = 0,4125$$

3- احتمال أن يكون ضغط دمه مرتفع ومدخن $P(A \cap D)$

$$P(A \cap D) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة لـ } (A \cap D)}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{40}{400} = \frac{1}{10} = 0,1$$

4- إحتمال أن يكون مصابا بهذا المرض علما بأنه مدخن $P(A/D)$

$$P(A/D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{0{,}1}{0{,}4125}=0{,}2424$$

أو

$$P(A/D)=\frac{\text{عدد الحالات الملائمة } (A\cap D)}{\text{عدد الحالات الممكنة لـ } (D)}=\frac{40}{165}=0{,}2424$$

* الحوادث المستقلة:

في بعض الحالات يكون إحتمال وقوع الحادث A لا يتأثر مطلقا بحدوث أو عدم حدوث (وقوع) الحادث B. أي لا فرق بين إحتمال الحادث A والاحتمال الشرطي للحادث A علما أن B قد وقع أي $P(A/B)=P(A)$ وفي هذه الحالة نقول أن الحادثين A و B مستقلين

ليكن A, B حادثين معرفين على نفس فضاء العينة Ω يقال بأن الحادثين A و B مستقلين إذا تحقق أحد الشروط المتكافئة التالية

$$\cdot\ P(A/B)=P(A)$$
$$\cdot\ P(B/A)=P(B)$$
$$\cdot\ P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

مثال: هل الحادثين A و D في التمرين السابق مستقلين؟ ولماذا؟

الحل: الحادثين A و D في التمرين السابق غير مستقلين وذلك لأن:

$$P(A)=0{,}125 \neq P(A/D)=0{,}2424$$

$$P(D)=0{,}4125$$

$$P(D/A)=\frac{P(A\cap D)}{P(A)}=\frac{0{,}1}{0{,}125}=0{,}8$$

$$P(D)\neq P(D/A)$$

$P(A\cap D) = 0.1$

$P(A) . P(D) = 0,125 . 0,4125 = 0,0516$

$P(A\cap D) \neq P(A) . P(D)$

وبالتالي الحادثين A وD مستقلين .

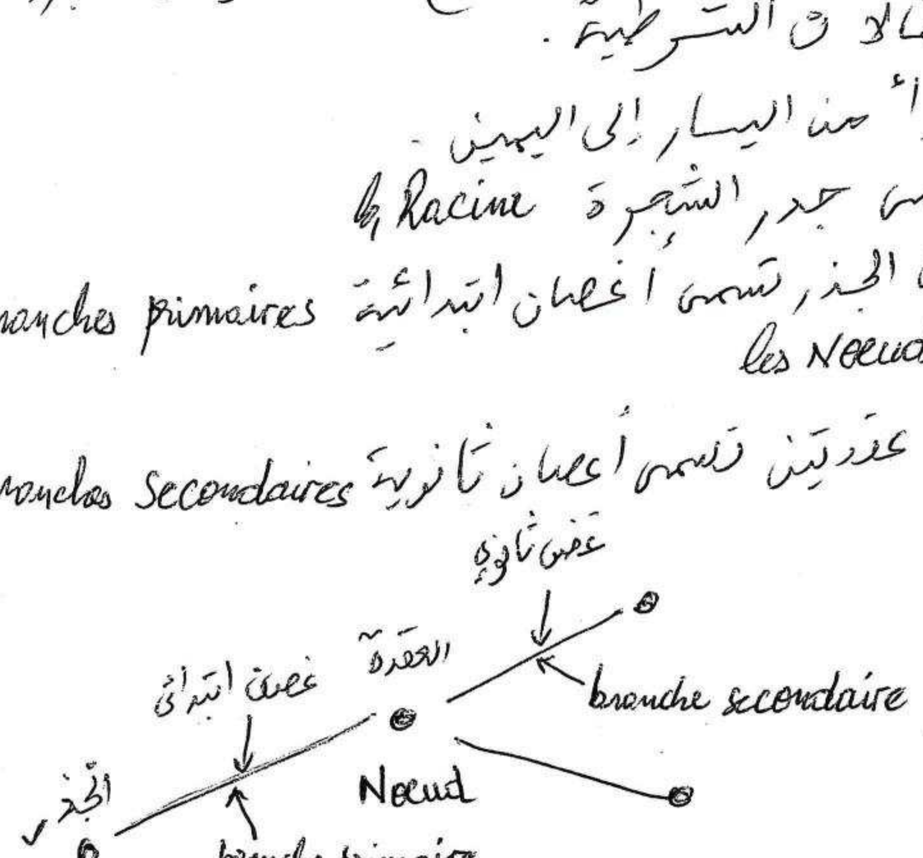
الشجرة الاحتمالية :

الشجرة الاحتمالية هي شكل أو مخطط بياني يسمح لنا بتلخيص التجربة العشوائية في الاحتمالات الشرطية .

تُرسم الشجرة وتقرأ من اليسار إلى اليمين .

مبدأ الشجرة يسمى جذر الشجرة La Racine

- الخطوط التي تنطلق من الجذر، تسمى أغصان ابتدائية Branches primaires تصل إلى العقد les Noeuds
- الخطوط التي تصل بين عقدتين تسمى أغصان ثانوية Branches secondaires



- الطريق الذي ينطلق من الجذر ليصل إلى العقدة يسمى المسار Trajet.

ملاحظة : مجموع أوزان الأغصان الابتدائية = 1

" أوزان الأغصان الثانوية المنطلقة من نفس العقدة = 1

ملاحظة :

1- وزن غصن ابتدائي هو احتمال الحادث المتواجد في طرفه .
2- مجموع أوزان الاغصان الابتدائية = 1
3- وزن غصن ثانوي هو الاحتمال الشرطي للحادث المتواجد في طرف هذا الغصن علما أن المسير الذي يصل إلى مبدئه قد تحقق
4- مجموع الاوزان للاغصان الثانوية المنطلقة من نفس العقدة = 1
5- وزن أو احتمال المسير الواحد يساوي حاصل ضرب أوزان أو الاغصان المؤلف منها
6- احتمال حادث مشترك بين عدة مسارات كاملة يساوي مجموع احتمالات هذه المسارات

مثال توضيحي :

يصيب مرض معين 3% من مجتمع ما . ~~بعد التشخيص~~
~~بعد~~ بعد اختبار التشخيص كانت النتائج كالتالي .
- عند الاشخاص المصابين 95% من الاختبارات موجبة و 5% سالبة
- " " الغير مصابين 1% " " " و 99% "
نختار شخصا عشوائيا .

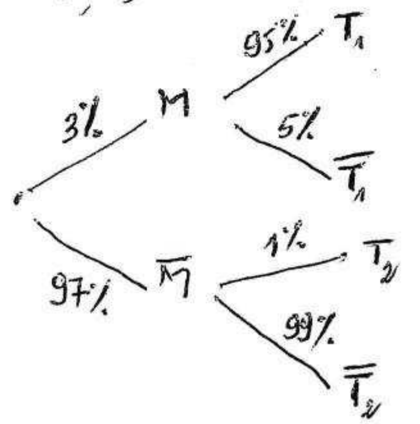
المطلوب : ~~ما هو احتمال~~
- انشئ شجرة احصائية لهذه التجربة العشوائية .
ما هو احتمال :
1- ان يكون الشخص المختار مصاب و اختباره موجبا .
2- " " " " غير " " سالب
3- " " " " " اختباره موجب
4- " " " " " " سالب
5- " " غير مصاب علما أن اختباره موجب
6- " " مصاب علما أن اختباره سالب .
7- ما رأيك في الاجابة 5 و 6

الحل: نعرف الحوادث كالتالي.

M : مصاب
$\overline{M}$: غير مصاب

T : اختبار موجب
$\overline{T}$: اختبار سالب

أ- انشاء الشجرة الاحتمالية لهذه التجربة العشوائية



	مصاب M	غير مصاب $\overline{M}$	
اختباره موجب T	0,0285 (95%)(3%)	0,0097 (1%)(97%)	0,0382
اختباره سالب $\overline{T}$	0,0015 (5%)(3%)	0,9603 (99%)(97%)	0,9618
	0,03	0,97	1

ب : حساب الاحتمالات

1- احتمال ان يكون الشخص المختار مصابا و اختباره موجبا $P(M \cap T_1)$

$$P(M \cap T_1) = P(M) \cdot P(T_1) = (3\%)(95\%)$$
$$= (0{,}03)(0{,}95)$$
$$\boxed{P(M \cap T_1) = 0{,}0285}$$

2- احتمال أن يكون الشخص المختار غير مصابا، اختباره سالبا $P(\overline{M} \cap \overline{T}_2)$

$$P(\overline{M} \cap \overline{T}_2) = P(\overline{M}) \cdot P(\overline{T}_2) = (97\%)(99\%)$$
$$= 0{,}97 \cdot 0{,}99$$
$$\boxed{P(\overline{M} \cap \overline{T}_2) = 0{,}9603}$$

3- احتمال ان يكون الشخص اختباره موجبا $P(T)$

$$P(T) = P(M \cap T_1) + P(\overline{M} \cap T_2)$$
$$= 0{,}0285 + \left(P(\overline{M}) \cdot P(T_2)\right)$$
$$= 0{,}0285 + ((0{,}97)(0{,}01))$$
$$= 0{,}0285 + 0{,}0097$$
$$\boxed{P(T) = 0{,}0382}$$

4- احتمال أن يكون الشخص اختباره سالب $P(T)$

$$P(\overline{T}) = P(M \cap \overline{T_1}) + P(\overline{M} \cap \overline{T_2}) = \left((0{,}03)(0{,}05)\right) + 0{,}9603$$
$$= 0{,}9618$$

أو

$$P(\overline{T}) = 1 - P(T)$$
$$= 1 - 0{,}0382$$
$$\boxed{P(\overline{T}) = 0{,}9618}$$

5- إحتمال أن يكون غير مصاب علمًا أن اختباره موجب $P(\overline{M}/T_2)$

$$P(\overline{M}/T_2) = \frac{P(\overline{M} \cap T_2)}{P(T_2)}$$
$$= \frac{(0{,}97).(0{,}01)}{0{,}01}$$
$$P(\overline{M}/T_2) = 0{,}97$$
$$P(\overline{M}/T_2) = P(\overline{M})$$

6- إحتمال أن يكون مصاب علمًا أن إختباره سالبًا. $P(M/\overline{T_1})$

$$P(M/\overline{T_1}) = \frac{P(M \cap \overline{T_1})}{P(\overline{T_1})}$$
$$= \frac{P(M) . \cancel{P(\overline{T_1})}}{\cancel{P(\overline{T_1})}}$$
$$P(M/\overline{T_1}) = P(M)$$

7- من السؤالين 5 و6 يتضح أن الحادثتين $\overline{M}$ و T_2 ، الحادثتين M و $\overline{T_1}$ حوادث مستقلة.