TP N°5 :Intégration numérique

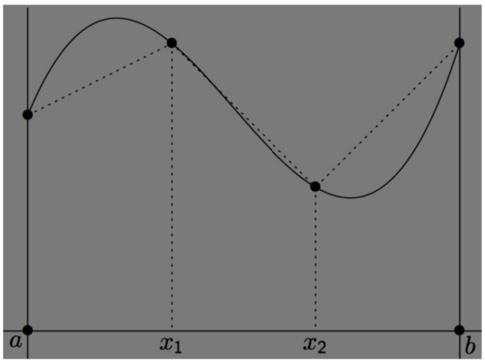
L'objectif de l'intégration numérique est de calculer l'intégrale I(a, b) d'une fonction f(x) sur un certain intervalle [a, b]

$$I(a,b) = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

A. *Méthode de trapèze :*

Cette méthode consiste à remplacer la courbe *f(x)* par une ligne brisée et à calculer l'aire de chaque trapèze, ensuite faire la somme des aires sur l'intervalle sur lequel la fonction est définie :

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \Delta x \ et\ \Delta x = \frac{b-a}{n}$$



Où n est le nombre de subdivision de l'intervalle [a b]

B. Méthode de Simpson :

La courbe f(x) est remplacé par une parabole (polynôme de degrés 2).
La valeur approchée de l'intégrale f sur l'intervalle [a b] par la méthode de Simpson est donnée par :

$$Is = \int_a^b f(x)dx = \frac{\Delta x}{3}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1,3,5\ldots}^{n-1} f(x_i) + 2\sum_{i=2,4,6\ldots}^{n} f(x_i)\right)$$

C. Exercice

1. Ecrire un programme Matlab qui calcule à l'aide de la méthode de trapèze pour n=10 l'intégrale suivant :

$$I = \int_0^\pi \sin\ x^2\ dx$$

2. Comparer votre résultat avec la valeur exacte de l'intégrale qui est 0, 772651.
3. Refaire l'exécution avec n= 100 et déduire le nombre de subdivision meilleur
4. Ecrire un deuxième programme Matlab qui calcule l'intégrale par la méthode de simpson pour n=10 et 100
5. Il existe dans Matlab des fonctions utilisant les deux méthodes suscitées :
   trapz : utilise la méthode de trapèze
   quad : calcul l'intégrale par la méthode de simpson

Utiliser ces fonctions et comparer avec les résultats obtenus

D. Manipulation

- Définier une fonction appelé « finteg » qui code l'équation ($\sin x^2$) en utilisant la commande inline
- Entrer les valeurs de a et b (borne d'intégration)
- Entrer le nombre « n »
- Calculer **dx** (pas d'intégrale)
- Créer le vecteur x entre **[0, π]** avec le pas dx
- Faire une boucle avec un indice i qui va de 1 à n pour calculer l'intégrale par la méthode de trapèze

Pour la méthode de simpson, posons :

$$Iimp = \sum_{i=1,3,5\ldots}^{n-1} f(x_i) \quad et \quad Ip = \sum_{i=2,4,6\ldots}^{n} f(x_i)$$

- Utiliser la boucle for pour calculer Iimp et Ip
- Evaluer la valeur de l'intégrale Is par la méthode de simpson
- Utiliser les fonctions trapz et quad et comparer les résultats obtenus