Couple de variables aléatoires à densité

Définition (rappel)
Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est appelée densité de probabilité (d.d.p) sur $\mathbb{R}^2$ si : 1) $f(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; 2) $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles.

Définition : le couple (X,Y) est dit à densité, s'il existe une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ d.d.p, notée $f_{X,Y}$ telle que pour tous intervalles $[a_1,b_1]$ et $[a_2,b_2]$ où $a_i \in \mathbb{R}$ $i=1,2$

$$P_{X,Y}\left([a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\right) = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy$$

Remarque
la fonction de répartition $F_{X,Y}$ d'un couple à densité $f_{X,Y}$ est donnée par :

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2$$

Proposition
Si (X,Y) est un couple aléatoire à d.d.p $f_{X,Y}$.
les lois marginales de X et Y sont respectivement P_X et P_Y et sont définies par :

$$\forall [a,b] \subset \mathbb{R},\ P_X([a,b]) = P(X \in [a,b]) = \int_a^b \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy \quad ②$$

$$\forall [c,d] \subset \mathbb{R},\ P_Y([c,d]) = P(Y \in [c,d]) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_c^d f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy.$$

Autrement dit, la v.a. marginale X est à d.d.p f_X et Y est à d.d.p f_Y.

Preuve

$$P_X([a,b]) = P(X \in [a,b], Y \in \mathbb{R}) = P_{(X,Y)}([a,b] \times \mathbb{R})$$

$$= \int_a^b \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \right) dx = \int_a^b f_X(x)\,dx$$

où $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$

de même pour Y : $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dx$.

Remarque : la d.d.p $f_{X,Y}$ du couple (X,Y) permet d'en déduire des lois marginales de X et Y. La réciproque est en général fausse.

Exemples

① Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto f(x,y) = \frac{1}{3} \mathbb{1}_{[0,1] \times [-1,2]}(x,y)$

Vérifier que f est bien une d.d.p sur $\mathbb{R}^2$

1) $f \geq 0$

2) $$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,1]\times[-1,2]}(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{3}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,dx}_{=1}\ \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{1}_{[-1,2]}(y)\,dy}_{=3} = 1$$

Considerons un couple (X,Y) de d.d.p f (notée $f_{X,Y}$) la loi de X (i.e sa d.d.p f_X) est donnée par:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{1}_{[0,1]\times[-1,2]}(x,y)\,dy$$

$$= \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\ \underbrace{\frac{1}{3}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbb{1}_{[-1,2]}\,dy}_{=1} = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

Ainsi $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$

de même

$$f_Y(y) = \frac{1}{3}\mathbb{1}_{[-1,2]}(y) \quad \text{d'où } Y \hookrightarrow \mathcal{U}_{[-1,2]}$$

II Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto f(x,y) = 2\,e^{-(x+2y)}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^{*+}\times\mathbb{R}^{*}}(x,y)$

On remarque $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1$.

Calculer : $P(X>1, Y<1)$; $P(X<Y)$; $P(X<a)$ $(a>0)$ 4

1) $P(X>1, Y<1) = \int_0^1 \int_1^{+\infty} 2e^{-x}e^{-2y}\,dx\,dy$

$$= \int_0^1 2e^{-2y}\left[-e^{-x}\right]_1^{+\infty} dy$$

$$P(X>1, Y<1) = e^{-1}\int_0^1 2e^{-2y}dy = e^{-1}(1-e^{-2})$$

2) $P(X<Y) = \int_0^{+\infty}\int_0^{y} 2e^{-x}e^{-2y}\,dx\,dy$

$$= \int_0^{+\infty} 2e^{-2y}(1-e^{-y})dy$$

$$= \int_0^{+\infty} 2e^{-2y}dy - \int_0^{+\infty} 2e^{-3y}dy = 1-\frac{2}{3}$$

$$P(X<Y) = \frac{1}{3}$$

3) $P(X<a) = \int_0^{a}\int_0^{+\infty} 2e^{-2y}e^{-x}\,dy\,dx$

$$P(X<a) = \int_0^{a} e^{-x}dy = 1-e^{-a}$$

Definition

Deux v.a.r X et Y sont dites indépendantes si pour tout intervalle $I\subset\mathbb{R}$ et $J\subset\mathbb{R}$:

$$P_{(X,Y)}(I\times J) = P(X\in I, Y\in J) = P_X(I)\cdot P_Y(J)$$

$$\Leftrightarrow \quad f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y) \;,\; \forall (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$$

Exemples

I. soit (X,Y) à d.d.p $f_{(X,Y)}(x,y) = \lambda\mu e^{-\lambda x - \mu y} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+}(x,y)$; $\lambda,\mu>0$

on remarque que $f_{X,Y}(x,y) = \left(\lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\right)\left(\mu e^{-\mu y} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y)\right)$

$$= f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Donc X et Y sont indépendants.

II. soit (X,Y) à d.d.p $f_{X,Y}(x,y) = 2\, \mathbb{1}_{\{0<x<y<1\}}$

on remarque $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^y 2\,dx\right) dy = \int_0^1 2y\,dy = 2\left[\tfrac{1}{2}y^2\right]_0^1 = 1$

$$f_X(x) = \int_x^1 2\,dy = \begin{cases} 2-2x & \text{si } 0<x<1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_0^y 2\,dx = \begin{cases} 2y & 0<y<1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Donc X et Y ne sont pas indépendants.

<u>Proposition</u> si X et Y sont indépendants

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$$

(Sous les hypothèses que $E(X)$ et $E(X)$ existent et $E(XY)$ existe.

Lois conditionnelles (dans le cas continu)

Soit $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$, un couple de v.a. à d.d.p $f_{X,Y}$, admettant pour d.d.p marginales f_X et f_Y.

Definition 1

pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $f_X(x) \neq 0$, la densité conditionnelle de Y sachant $(X=x)$ est la fonction : $f_Y^{X=x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$:

$$f_Y^{X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

Definition 2

Supposons $E(|Y|) < +\infty$. L'espérance conditionnelle de Y a l'evenement $(X=x)$ est le nombre reel donné par

$$E^{X=x}(Y) = \int_{\mathbb{R}} y f_Y^{X=x}(y) = \int_{\mathbb{R}} y \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

L'espérance conditionnelle de Y sachant X est la variable aléatoire reelle $E^X(Y) = E(Y/X) = h(X)$

avec $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto h(x) = E^{X=x}(Y)$

Théorème (de l'espérance totale)

$$E(Y) = E(E\, Y/X)$$

Preuve :

$$E(E(Y/X)) = E(h(X)) = \int_{\mathbb{R}} h(x) f_X(x)\,dx$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} y f_Y^{X=x}(y) \cdot f_X(x)\,dx\,dy$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} y \frac{f_{X,Y}(x,y) f_X(x)}{f_X(x)}\,dx\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} y \left(\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y)\,dy$$

$$= E(Y).$$

Exemple :

Soit un couple (X,Y) de d.d.p $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{x} e^{-x-\frac{y}{x}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{*}_{+} \times \mathbb{R}^{+}}(x,y)$

on veut Calculer $E(Y)$?

Calculons $f_Y^{X=x}(y)$?

or

$$f_Y^{X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}}^{+\infty} \frac{1}{x} e^{-x-y/x}\,dy = e^{-x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{*+}}(x) \quad (X \hookrightarrow \mathcal{E}(1))$$

d'où $f_Y^{X=x}(y) = \frac{1}{x} e^{-y/x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(y) \quad (x>0)$

on a ainsi

$$h(x) = E^{X=x}(Y) = \int_{\mathbb{R}} y f_Y^{X=x}(y)\,dy = \int_0^{+\infty} \frac{y}{x} e^{-y/x}\,d = x$$

Par conséquent (Comme $h(X)=X$), on a

$$E(Y)=E(\underbrace{E(Y/X)}_{h(X)})=E(X)=1 \quad (X \hookrightarrow \mathcal{E}(1))$$

Propriete

2 v.a X, Y à densités sont indépendantes si et seulement si l'une des propriétes suivantes (equivalente) sont verifiees :

(1) $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x).f_Y(y)$

(2) $f_Y^{X=x}(y)=f_Y(y)$

(3) $F_{X,Y}(x,y)=F_X(x).F_Y(y)$

(4) $f_X^{Y=y}(x)=f_X(x)$

Propriete

si X et Y sont indépendants alors

(1) $Cov(X,Y)=0$

(2) $\rho_{X,Y}=0$

(3) $E(XY)=E(X).E(Y)$

(4) $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$

Scanned by CamScanner

Exercice 1 :

1) Montrer que $f(x,y) = \dfrac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2} - \frac{y^2}{2(\sigma')^2}}}{2\pi}$ est la densité d'un couple (X,Y)

2) Trouver les d.d.p des v.a. marginales X et Y

3) X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 :

1) Soit (X,Y) un couple de v.a. à d.d.p $f(x,y) = y e^{-xy} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x) \mathbb{1}_{[0,1]}(y)$

Trouver les d.d.p de X et Y

2) X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 :

même questions que l'exercice 2 pour le couple (X,Y)

de d.d.p $f(x,y) = \dfrac{1}{3\pi} \exp\left(-\dfrac{1}{6}(x^2 + 2xy + 5y^2)\right)$.

Exercice 4

Soit $f(x,y) = (kx^2 + y^2 - xy) \mathbb{1}_{[-1,1]}(x) \cdot \mathbb{1}_{[-1,0]}(y)$ d'un couple (X,Y).

1) Déterminer k pour que f soit une d.d.p

2) Calculer les d.d.p marginales de X et Y.

3) Donner la densité conditionnelle de la v.a. X sachant $(Y=0)$

4) Calculer $P(0 < X < 1 / (Y=0))$

5) Calculer $E(X/(Y=0))$.

Exercice 5 :

1) Vérifier que $f(x,y) = e^{-y} \mathbb{1}_{[0,x]}(y) \cdot \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$ est une d.d.p

du couple (X,Y)

2) Montrer que la v.a. X suit une loi $\mathcal{E}(1)$.

3) Déterminer la d.d.p de Y

4) Calculer $Cov(X,Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

Somme de variables aléatoires indépendantes.

Definition (produit de convolution)

Soit f et g deux fonction reelles verifiant :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx < +\infty \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,dx < +\infty$$

On definit le produit de convolution $(*)$ de f et g par :

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}} g(x-t)f(t)\,dt.$$

Propriete

Soit X et Y deux variables aléatoires continues indépendantes de densité respectives f_X et f_Y. Alors la d.d.p de $S := X+Y$ est definie par $f_S = f_X * f_Y$

(autrement dit $P(X+Y \in [a,b]) = \int_a^b (f_X * f_Y)(x)\,dx.$)

Preuve : soit $a<b$, Comme (X,Y) est de d.d.p $f_X(x) f_Y(y)$

on a $P(X+Y \in [a,b]) = \int_{(x,y):\, x+y \in [a,b]} f_X(x) . f_Y(y)\,dx\,dy$

On fait le changement de variable $(x,y) \mapsto (t,s) = (x, x+y)$. Alors Comme (x,y) varie dans $\mathbb{R}^2$ de façon $(x+y) \in [a,b]$

$t \in \mathbb{R}$ et $s \in [a,b]$. On a

$$P(X+Y \in [a,b]) = \int_a^b \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(s-t)\,dt\,ds$$

Car le jacobien du changement de variable : $Jac = \begin{vmatrix} \frac{\partial t}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial x} \\ \frac{\partial t}{\partial y} & \frac{\partial s}{\partial x} \end{vmatrix} = 1$

Exemples

(I) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,\sigma_1^2)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0,\sigma_2^2)$ deux v.a. indep.

On pose $S := X+Y$

$$f_S(x) = f_X * f_Y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t)\,dt = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2\sigma_2^2}}$$

$$\Rightarrow f_S(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left((\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2 - 2\sigma_1^2 x t + \sigma_1^2 x^2\right)\right) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(\left((\sigma_1^2+\sigma_2^2)^{1/2} t - \frac{\sigma_1^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^{1/2}} x\right)^2 - \frac{\sigma_1^4}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} x^2 + \sigma_1^2 x^2\right)\right) dt$$

$$= \frac{\exp\left(-\frac{x^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right)}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left((\sigma_1^2+\sigma_2^2)^{1/2} t - \frac{\sigma_1^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^{1/2}} x\right)^2\right) dt$$

on pose $u = (\sigma_1^2+\sigma_2^2)^{1/2} t - \frac{\sigma_1^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^{1/2}} x$

$$\Rightarrow f_S(x) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\right)}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\right) \frac{du}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^{1/2}}$$

or $$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\right) \frac{du}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^{1/2}} = \frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{2\pi}}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^{1/2}}$$

Donc

$$f_S(x) = f_X * f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)$$

d'où $S = X+Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

Scanned by CamScanner

(II) Soit $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \exp(-\frac{2}{3}(x^2 - xy + y^2)$ la d.d.p (12)

d'un couple (X,Y).

1) Calculons $E(XY)$

$$E(XY) = \iint_{\mathbb{R}^2} xy \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \exp(-\frac{2}{3}(x^2 - xy + y^2) \, dx\, dy.$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} xy \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \exp(-\frac{2}{3}\left[\left(y - \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x^2\right] dx\, dy.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^2} x e^{-\frac{x^2}{2}} \underbrace{\left(\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2\pi}} \int y \; e^{-\frac{(y-\frac{x}{2})^2}{2(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}} dy \right)}_{(*)} dx$$

$$(*) = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2\pi}} \int y \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{(y - x/2)^2}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)\right) dy.$$

Posons $Z \hookrightarrow N\left(\frac{x}{2} ; \sigma^2 = \frac{3}{4}\right)$

$$(*) = E(Z) = \frac{x}{2}$$

d'où $E(XY) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int x^2 \exp(-\frac{1}{2}x^2) dx$

$$= \frac{1}{2} E(T^2) \text{ où } T \hookrightarrow N(0,1)$$

$$E(XY) = 1/2$$

Scanned by CamScanner

2) Calculons f_X et f_Y les densités marginales.

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{2}{3}(x^2 - xy + y^2)\right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \exp\left(-\frac{2}{3}\left(\left(y-\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x^2\right)\right) dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(y-\frac{x}{2}\right)^2}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right) dy}_{(**)}$$

On remarque $(**) = 1$, car $\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(y-\frac{x}{2}\right)^2}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right)$ est la d.d.p de la v.a qui suit une $N\left(\frac{x}{2}, \frac{3}{4} = \sigma^2\right)$.

D'où $X \hookrightarrow N(0,1)$

Par symétrie, on a $Y \hookrightarrow N(0,1)$

3) Nous pouvons déduire $Cov(X,Y)$:

Ainsi $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X).E(Y)$

or $E(X) = 0$ et $E(Y) = 0$

D'où $Cov(X,Y) = E(XY) - 0.0 = 1/2 \neq 0$

On remarque X et Y ne sont pas indépendantes

4) Calculons la d.d.p de $S = X+Y$

$$f_S(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, s-x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int_{-\infty}^{+\infty} exp\left(-\frac{2}{3}\left(x^2 - x(s-x) + (s-x)^2\right)\right.$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int_{-\infty}^{+\infty} exp\left(-\frac{2}{3}\left(x^2 - xs + x^2 + s^2 - 2sx + x^2\right)\right. dx$$

$$= \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \int_{\mathbb{R}} exp\left(-\frac{2}{3}s^2 - \frac{2}{3}\left(3x^2 - 3xs\right)\right. dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{2}{3}s^2\right) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-2\left(x^2 + xs + \frac{s^2}{4} - \frac{s^2}{4}\right)\right) dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}\frac{s^2}{(\sqrt{3})^2}\right) \int \underbrace{\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\left(x - \frac{s}{2}\right)^2\right) dx}_{(***)}$$

On remarque que $(***)$ est la d.d.p d'une loi $N\left(\frac{s}{2} ; \frac{1}{4} = \sigma^2\right)$

d'où $\int *** = 1$.

Ainsi $S \hookrightarrow N(0 ; 3 = \sigma^2)$.

⑤ Calculons $E(X/Y=y)$

$$E(X/Y=y) = \int x f_X^{Y=y}(x)\,dx$$

or $$f_X^{Y=y}(x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{x}{\pi\sqrt{3}}\exp\left(-\frac{2}{3}(x^2-xy+y^2)\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow f_X^{Y=y}(x) = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{3}.\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{2}{3}x^2+\frac{2}{3}xy-\frac{2}{3}y^2+\frac{x^2}{2}\right)$$

$$= \sqrt{2}\,\frac{x}{\sqrt{3}.\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{6}+\frac{2}{3}xy-\frac{2}{3}y^2\right)$$

$$= \sqrt{2}\,\frac{x}{\sqrt{3}.\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{6}(x^2-4xy+4y^2)\right)$$

$$f_X^{Y=y} = \sqrt{2}\,\frac{x}{\sqrt{3}.\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2y}{\sqrt{3}}\right)^2\right)$$

$$E(X/Y=y) = \sqrt{2}\int \underbrace{x\frac{1}{\sqrt{3}.\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-2y)^2}{(\sqrt{3})^2}\right)}_{(\alpha)}dx$$

(α) est la d.d.p de la $N(2y,\ 3=\sigma^2)$

donc $E(X/Y=y) = 2\sqrt{2}\,y$

Par conséquent $E(X/Y) = 2\sqrt{2}\,Y$

Exercice 1 :

Soit (X,Y) un couple de v.a.r de d.d.p $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2}{2} + xy - y^2\right)$

1°) Déterminer les lois marginales (d.d.p) de X et Y.

2°) Montrer que la v.a.r Y sachant $(X=x)$ suit $N\left(\frac{x}{2} ; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Exercice 2 :

Soit X une v.a.r qui suit une loi $\mathcal{U}_{]0,1[}$ et soit Y une v.a.r qui suit une loi $\mathcal{U}_{]0;X[}$

a) Définir la densité conjointe $f_{X,Y}$ de X et Y.

b) Calculer $E(X)$, $E(Y)$; $Var(X)$ et $Var(Y)$

c) Calculer $\rho_{X,Y}$ le coefficient de corrélation

Exercice 3

Soit X et Y deux v.a.r indépendantes où $X \hookrightarrow B(1/2)$ et $Y \hookrightarrow b(2;1/2)$

on pose $M = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 1 & Y \end{pmatrix}$. Calculer la probabilité pour que la matrice M soit inversible.

Exercice 4 :

Soit X et Y deux v.a.r indépendantes où $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\sqrt{3})$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,2[}$: on pose $S = X+Y$ et $T = X-Y$

1) Calculer $cov(S,T)$

2) Calculer f_S et f_T les d.d.p marginales de S et T

3) S et T sont-elles indépendantes ?