Université Abou-Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année Universitaire : 2019-2020
Module : Contrôle optimal

Niveau : ***Première Année Master Biomathématiques et Modélisation***

T. D. Contrôle optimal non linéaire : Cas d'Etat final libre.

Exercice 1 : Résoudre le problème de contrôle optimal suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + u(t), \\ x(1) = 2, \\ \min \int_1^5 \left(x^2(t) + u^2(t) - x(t)u(t)\right) dt. \end{cases}$$

Exercice 2 : Résoudre le problème de contrôle optimal suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + u(t), \\ x(0) = 5, \\ \min\limits_{0 \le u(t) \le 2} \int_0^2 \left(u^2(t) + 3u(t) - 2x(t)\right) dt. \end{cases}$$

Exercice3 : Contrôle d'insectes nuisibles par des prédateurs

Pour traiter une population x d'insectes nuisibles, on introduit dans l'écosystème une population y d'insectes prédateurs (non nuisibles), se nourrissant des nuisibles. Après normalisation, le système s'écrit

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)(1 - y(t)),\ t \in [0,T], \\ y'(t) = -y(t) + u(t),\ t \in [0,T], \\ x(0) = x_0 > 0, \\ y(0) = y_0 > 0, \end{cases}$$

Le contrôle u est le taux d'introduction de nouveaux prédateurs, il vérifie la contrainte

$$0 \le u(t) \le M.$$

On cherche à minimiser, au bout d'un temps $T > 0$ **fixé**, le nombre de nuisibles, tout en cherchant à minimiser la quantité globale de prédateurs introduits ; autrement dit, on veut minimiser

$$C(u) = \int_0^T u(t)dt + x(T).$$

1)

1.1) Démontrer que, pour tout contrôle, on a $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ sur $[0,T]$.

1.2) Déterminer les points d'équilibre du système, c'est-à-dire les triplets (x_c, y_c, u_c) qui sont des solutions constantes du système.

2)

2.1) Ecrire les équations de l'état adjoint $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t))$ ainsi que le Hamiltonien associé.

2.2) Vérifer enfin que $\lambda_1(t)x(t) = x(T)$ pour tout $t \in [0,T]$ et en déduire une expression de $\lambda_2(t)$ pour tout $t \in [0,T]$.

3)

3.1) Démontrer que les contrôles optimaux sont bang-bang, c'est-à-dire qu'ils ne prennent que les valeurs 0 et M.

3.2) Démontrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $u(t) = 0$ pour tout $t \in [T-\varepsilon, T]$.

4) Démontrer que u a au plus une commutation. Lorsqu'il en a une, déterminer à quel temps elle a lieu.

Exercice4 : Dosage du niveau de glucose dans le sang.

On considère un modèle trés simplifié du mécanisme régissant le niveau de glucose dans le sang. On désigne par $x(t)$ la quantité de glucose au temps t à partir de l'instant initial $t_0 = 0$ ($x(t)$ sera l'état du système). On suppose que si on ne fait rien, elle diminuera à un taux proportionnel à la quantité ($\dot{x} = -\alpha x$). Dans le but de maintenir le niveau de glucose à un niveau acceptable, du glucose est transfusé dans le sang avec une vitesse de transfusion $u(t)$ (cette vitesse $u(t)$ sera le contrôle du problème).

L'évolution de l'état x se fait donc suivant l'équation différentielle

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t) + u(t); t \geq 0 \tag{1}$$

avec $\alpha > 0$ une constante donnée. On considère aussi la donnée initiale

$$x(0) = a, \tag{2}$$

avec $a > 0$ donnée représentant la quantité de glucose au moment initial. On se propose d'amener, à un moment $T > 0$ **donné**, la quantité de glucose proche d'un point b donné avec $b > 0$, mais avec un coût minimal. Nous considérons alors comme modèle trés simple, le problème de contrôle suivant :

$$\begin{cases} \min \left(\int_0^T u^2(t)\,dt + \beta\,(x(T)-b)^2 \right), \\ \dot{x}(t) = -\alpha x(t) + u(t), \\ x(0) = a, \end{cases} \tag{3}$$

avec $\beta > 0$.

Nous admettons qu'on a l'existence et l'unicité d'une solution optimale $(x^*; u^*)$ de (3).

1) En utilisant le prinicipe de minimum de pontriaguine

i) Ecrire l'équation de l'état adjoint $\lambda^*(t)$.

ii) Vérifier que $\lambda^*(T) = 2\beta\,(x^*(T) - b)$.

iii) Ecrire les autres conditions d'optimalité.

2) Résoudre ce système d'optimalité et trouver le contrôle optimal $u^*(t)$.