طرق العد.

يعتبر المبدأ الأساسي للعد أمرا مهما في عناصر نظرية الاحتمالات والتي تنص على أنه إذا كانت النتائج الممكنة لتجربة أخرى هي m_2 فإن النتائج الممكنة للتجربتين ما هو $m_1 \times m_2$.

وهناك ثلاث أنواع لطرق العد:

1- الترتيبة L'arrangement

إذا كان لدينا المجموعة الكلية E مكونة من n عنصر وأردنا تشكيل مجموعة جزئية من p عنصر بحيث $p \leq n$. نسمي ترتيبة كل مجموعة جزئية مكونة من p عنصر مأخوذة من n عنصر ونرمز لها بالرمز A_n^p وهي نوعان:

1-1: ترتيبة بدون تكرار: في هذه الحالة يجب عدم إعادة العنصر المسحوب من المجموعة n ويكون السحب الثاني من المجموعة $(n-1)$ وهكذا... وقانونها هو:

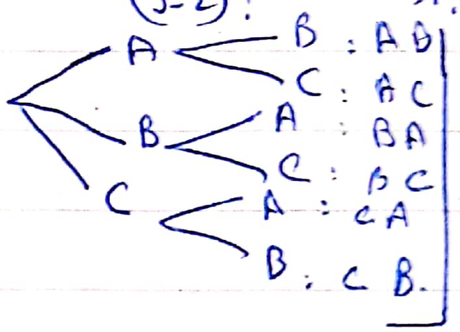
$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} \quad \text{حيث} \quad 1 \leq p \leq n.$$

مثال: ما هو عدد الكلمات التي يمكن تكوينها من حرفين (بمعنى أو بدون معنى) مأخوذة من المجموعة التالية: $A = \{A, B, C\}$ مع مراعاة عدم تكرار الحرف.

الحل: الترتيب مهم هي ترتيبة والتكرار مرفوض إذا هي ترتيبة بدون تكرار حيث $p = 2$، $n = 3$.

$$P_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3 \times 2 \times 1}{1!} = 6.$$ هي $\Omega = \{AB, AC, BA, BC, CA, CB\}$.

يمكن حل تمرين بشجرة احتمالات:



مثال (2): كم طريقة يمكن ترتيب 10 كتب في رف مكتبة تتسع لـ 5 كتب

ترتيب مهم } هي ترتيبة بدون تكرار: $n = 10$, $p = 5$
تكرار مرفوض

$$A_{10}^5 = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10!}{5!}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times \cancel{5!}}{\cancel{5!}} = 30240$$ حالة.

1-2: ترتيبة بتكرار: في هذه الحالة يمكننا تكرار كل عنصر لأكثر من مرة وبذلك فإن عدد الترتيبات بتكرار من p عنصر مأخوذة من n عنصر يحسب كالتالي: $A_n^p = n^p$

مثال 1: نفس المثال السابق (لدينا 3 حروف ABC، ونكون كلمات من حرفين). ويمكن تكرار كل الحروف.

الحل: ترتيب مهم مع تكرار $p=2$, $n=3$ ترتيبة بتكرار ومنه: $\{AA, BB, CC, AB, AC, BA, BC, CA, CB\}$.

$A_n^p = A_3^2 = 3^2 = 9$

مثال 2:

إذا كان لدينا كيس به 8 كرات مرقمة، أوجد عدد الحالات لسحب 3 كرات في الحالتين السحب مع الإرجاع والسحب بدون إرجاع.

الحل: في الحالة الأولى ترتيب مهم ويوجد تكرار ومنه ترتيبة بتكرار، $n=8$, $p=3$: $A_8^3 = 8^3 = 512$.

" " الثانية ترتيب مهم وبدون " " بدون تكرار $n=8$, $p=3$: $A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8\times7\times6\times5!}{5!} = 336$

2- التبديلة Permutation

نسمي ترتيب n عنصر من العناصر المختلفة تبديلة هذه العناصر مأخوذة من المجموعة Ω بشرط أن نأخذ كل العناصر أي $p=n$. أي هي عدد المجموعات التي يمكن تشكيلها من هذه المجموعة التي تختلف باختلاف ترتيب أحد العناصر على الأقل وتعطى بالعلاقة التالية $n!$

$n!$ هو n عاملي أو مضروب n حيث أن: $0! = 1$, $1! = 1$, $2! = 2\times1$, $3! = 3\times2\times1 = 6$,

$4! = 4\times3\times2\times1 = 24$, $5! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$...

مثال 1: ما هي عدد الطرق التي يمكن ترتيب بها حروف المجموعة التالية $\Omega = \{A, B, C\}$.

الحل: ترتيب مهم، أخذ كل العناصر ⟸ هي تبديلة $n=3$. $n! = 3! = 3\times2 = 6$.

$\Omega = \{ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA\}$

مثال 2: إذا كان لدينا مجموعة الأرقام التالية $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ كم عدد الأعداد التي يمكن تكوينها من 5 أرقام من هذه المجموعة بدون تكرار. $n=5$.

$n! = 5! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$.

ملاحظة: التبديلة هي ترتيبة بدون تكرار.

3- التوفيقة : combinaison

من كل مجموعة جزئية يمكن اختيارها من المجموعة الكلية بأخذ كل العناصر أو جزء منها وذلك دون مراعاة الترتيب حيث اذا كان لدينا مجموعة E مكونة من n عنصر فإن عدد التوفيقات التي يمكن تكوينها حيث تحوي كل عنصر P. يرمز لها ب C_n^p

وقانونه $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ حيث $1 \leqslant n \leqslant m$.

مثال:

يتكون قسم دراسي من 40 تلميذا، اردنا اختيار 3 تلاميذ لتشكيل لجنة ممثلة للقسم فكم طريقة يمكن ذلك.

الحل: الترتيب غير مهم فهي توفيقة $n=40$، $P=3$.

$$C_{40}^3 = \frac{40!}{3!(40-3)!} = \frac{40\times39\times38\times\cancel{37!}}{3\times2\times\cancel{37!}} = 9880.$$

مثال 2:

لدينا 8 رجال و 6 نساء، نستدعون لتوظيف 4 منهم في مناصب شغل.

ماهو عدد الحالات الممكنة لتوظيف هذه المجموعة.

" " " " " " " " علما اننا اخترنا رجلين وامرأتين؟

الحل الترتيب غير مهم فهي توفيقة في الحالتين:

1- $n=14, P=4$

$$C_{14}^4 = \frac{14!}{4!(14-4)!} = \frac{14\times13\times12\times11\times\cancel{10!}}{4\times3\times2\times\cancel{10!}} = \frac{24024}{24} = 1001.$$

2-

$$C_8^2 \times C_6^2 = \frac{8!}{2!\,6!}\times\frac{6!}{2!\,4!} = \frac{8\times7\times\cancel{6!}}{2\times\cancel{6!}}\times\frac{6\times5\times\cancel{4!}}{2\times\cancel{4!}} = 28\times15 = 420$$