

Les corps flottants ou flotteurs (suite)

Lors des précédentes séances de cours, nous avons pu définir ce que sont : un flotteur, une poussée d'Archimède, une carène, un centre de poussée, une surface de flottaison ou une flottaison S . Aussi, cela nous a permis ensuite d'étudier l'équilibre d'un flotteur en comparant la poussée d'Archimède au poids du flotteur.

La pertinence d'une étude de la stabilité du corps flottant s'en suit.

La stabilité d'un flotteur.

Un flotteur en équilibre subit des oscillations qui sont des petits mouvements de rotation qu'on peut décomposer en deux mouvements (cette décomposition facilite l'étude de ces mouvements) à savoir :

1// Un mouvement de rotation autour d'un axe longitudinal du flotteur appelé mouvement de Roulis ou « Roulis ». Ce dernier s'effectue autour d'un point appelé « métacentre de Roulis », il est noté M_R .

2// Un mouvement de rotation autour d'un axe transversal du flotteur appelé mouvement de Tangage ou « Tangage ». Celui-ci s'effectue autour d'un point appelé « métacentre de Tangage », il est noté M_T .

La stabilité d'un flotteur est étudiée en comparant les distances métacentriques CM_R et CM_T séparant respectivement le centre de poussée C du métacentre de Roulis M_R et du métacentre de Tangage M_T à la distance CG séparant le centre de poussée C du centre de gravité G du flotteur (ce qui représente la position du centre de gravité G du flotteur par rapport aux deux métacentres M_R et M_T).

Les distances métacentriques CM_R et CM_T sont déterminées à partir des formules suivantes :

$$CM_R = \frac{I_{S/x'x}}{V_{\text{carène}}} \quad \text{où :}$$

$I_{S/x'x}$ est le moment d'inertie de la flottaison S par rapport à l'axe longitudinal $x'x$ passant par O le centre de gravité de S ,

$V_{\text{carène}}$ est le volume de la carène

$$CM_T = \frac{I_{S/y'y}}{V_{\text{carène}}} \quad \text{où :}$$

$I_{S/y'y}$ est le moment d'inertie de la flottaison S par rapport à l'axe transversal $y'y$ passant par O le centre de gravité de S ,

$V_{\text{carène}}$ est le volume de la carène

Une fois la distance CG déterminée (ou calculée), trois cas de figures peuvent apparaître lorsque nous comparons entre les trois distances à savoir CG , CM_R et CM_T .

1// Si **CG** est inférieure à **CM_R** et **CM_T** (**CG < CM_R < CM_T**) c'est-à-dire le centre de gravité G est plus bas que les deux métacentres M_R et M_T alors le flotteur est en équilibre **absolument stable**.

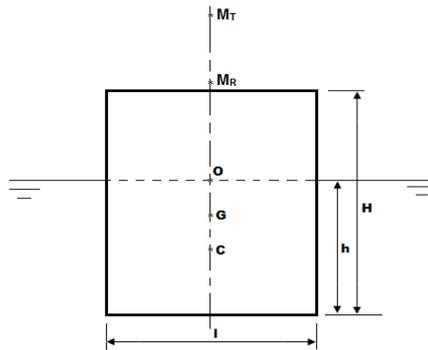
2// Si **CG** est supérieure à **CM_T** et **CM_R** (**CG > CM_T > CM_R**) c'est-à-dire le centre de gravité G est plus haut que les deux métacentres M_R et M_T alors le flotteur est en équilibre **absolument instable**.

3// Si **CG** est supérieure à **CM_R** et inférieure à **CM_T** (**CM_R < CG < CM_T**) c'est-à-dire le centre de gravité G est situé entre les deux métacentres M_R et M_T alors le flotteur est en équilibre **mixte** (tantôt stable, tantôt instable).

Exemple d'application :

On considère un flotteur de forme parallélépipédique rectangle de dimensions $L \times l \times H$ immergé d'une hauteur h comme le montre la figure ci-dessous.

1. Déterminer la position du centre de poussée C.
2. Calculer les distances métacentriques **CM_R** et **CM_T**.
3. Etudier la stabilité de ce flotteur.



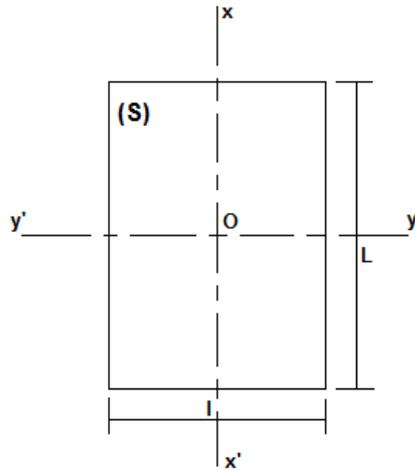
1. Détermination de la position du centre de poussée C.

Ce centre de poussée se trouve au centre de gravité de la carène qui est de forme parallélépipédique rectangle de dimensions $L \times l \times h$, donc :

$$OC = h / 2$$

2. Calcul des distances métacentriques **CM_R** et **CM_T** :

Soit S la surface de flottaison qui, dans ce cas est de forme rectangulaire de dimensions $L \times l$.



$\mathbf{CM}_R = \frac{I_{S/x'x}}{V_{\text{carène}}}$ où $x'x$ est donc l'axe longitudinal de la flottaison S passant par son centre de gravité O

$I_{S/x'x}$ est le moment d'inertie de S par rapport à $x'x$ c'est-à-dire le moment d'inertie d'un rectangle par rapport à l'axe longitudinal parallèle à sa longueur L et passant par O, le centre de gravité du rectangle.

Donc : $I_{S/x'x} = L l^3 / 12$

Et $V_{\text{carène}}$ est donc le volume de la carène qui est égal à : $V_{\text{carène}} = L.l.h$

$$\mathbf{CM}_R = \frac{I_{S/x'x}}{V_{\text{carène}}} = L \cdot l^3 / 12 \cdot L.l.h \Rightarrow \mathbf{CM}_R = l^2 / 12 \cdot h$$

Il en est de même pour :

$\mathbf{CM}_T = \frac{I_{S/y'y}}{V_{\text{carène}}}$ où $y'y$ est donc l'axe transversal de la flottaison S passant par son centre de gravité O

Donc : $I_{S/y'y} = l L^3 / 12$

$$\mathbf{CM}_T = \frac{I_{S/y'y}}{V_{\text{carène}}} = l \cdot L^3 / 12 \cdot L.l.h \Rightarrow \mathbf{CM}_T = L^2 / 12 \cdot h$$

3. Etude de la stabilité du flotteur.

On commence par déterminer la distance **CG** pour la comparer aux distances métacentriques \mathbf{CM}_R et \mathbf{CM}_T déjà calculées.

$$\mathbf{CG} = (H / 2) - (h / 2)$$

Application numérique :

On donne : $L = 8 \text{ m}$; $l = 4 \text{ m}$; $H = 6 \text{ m}$; $h = 4 \text{ m}$.

On obtient :

$$\mathbf{CM}_R = 4^3 / 12 \cdot 4 = 1,33 \text{ m} ; \mathbf{CM}_T = 8^3 / 12 \cdot 4 = 10,67 \text{ m} \text{ et } \mathbf{CG} = 3 - 2 = 1 \text{ m} .$$

Remarque :

$$\mathbf{CG} = 1 \text{ m} < \mathbf{CM}_R = 1,33 \text{ m} < \mathbf{CM}_T = 10,67 \text{ m}$$

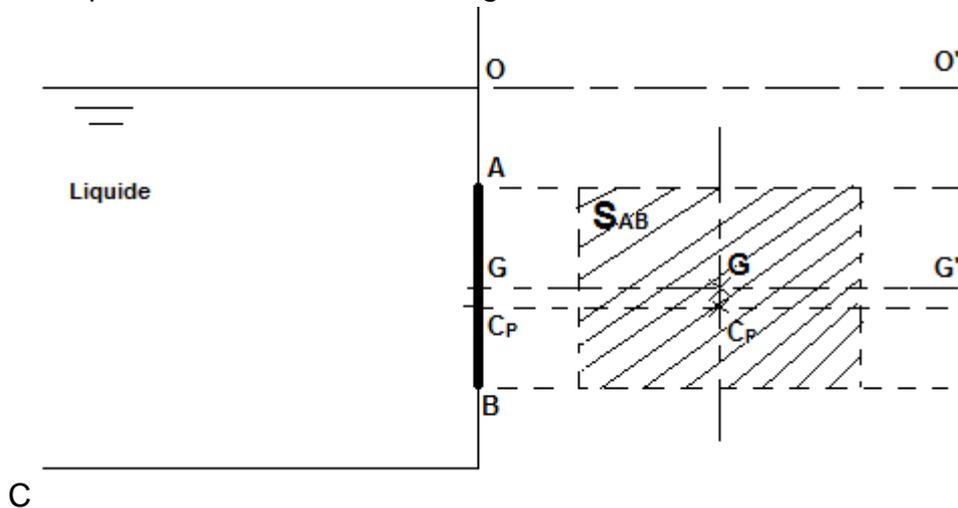
C'est-à-dire le centre de gravité G est plus bas que les deux métacentres M_R et M_T donc le flotteur est en équilibre absolument stable.

Attention !

Dans l'application ci-dessus, le flotteur était de forme parallélépipédique. Lorsque cette forme change (devient cylindrique par exemple, ou autre) le centre de gravité G du flotteur, la forme de la carène (donc son volume et son centre de gravité C) ainsi que la forme de la flottaison S (donc les moments d'inertie $I_{S/x'x}$ et $I_{S/y'y}$) **changent aussi**.

Résultante des forces de pression dues à l'action d'un liquide sur une paroi plane

On considère une surface plane S_{AB} , de forme quelconque (rectangulaire par exemple), en contact avec un liquide, comme le montre la figure suivante :



Chaque point de cette surface, en contact avec le liquide, est soumis à une force élémentaire de pression. On détermine alors la résultante vectorielle \vec{F}_{AB} de ces forces élémentaires de pression.

Cette résultante est définie par :

- ✓ une direction perpendiculaire à la surface S_{AB} , donc horizontale dans ce cas (—) ;
- ✓ un sens allant du liquide vers la surface, donc de droite à gauche dans ce cas (—) ;
- ✓ un module tel que : $F_{AB} = P_G \cdot S_{AB}$ où :

P_G est la pression exercée par le liquide sur le centre de gravité G de la surface S_{AB}

S_{AB} est l'aire de la surface pressée S_{AB}

Or, on sait que : $P_G = \rho_{\text{liquide}} \cdot g \cdot z_G$ où :

ρ_{liquide} est la masse volumique du liquide

g est l'accélération de la pesanteur

$z_G = OG$ est la profondeur du centre de gravité G de la surface S_{AB}

$$\Rightarrow \vec{F}_{AB} = \rho_{\text{liquide}} \cdot g \cdot z_G \cdot S_{AB}$$

- ✓ un point d'application appelé centre de poussée et noté C_P .

La profondeur de ce point d'application est déterminée en utilisant la formule suivante :

$$z_{Cp} = OC_P = \frac{I_{S_{AB}/G'G}}{z_G \cdot S_{AB}} + z_G \quad \text{où :}$$

z_G est la profondeur du centre de gravité G de la surface S_{AB} ;

S_{AB} est l'aire de la surface S_{AB} ;

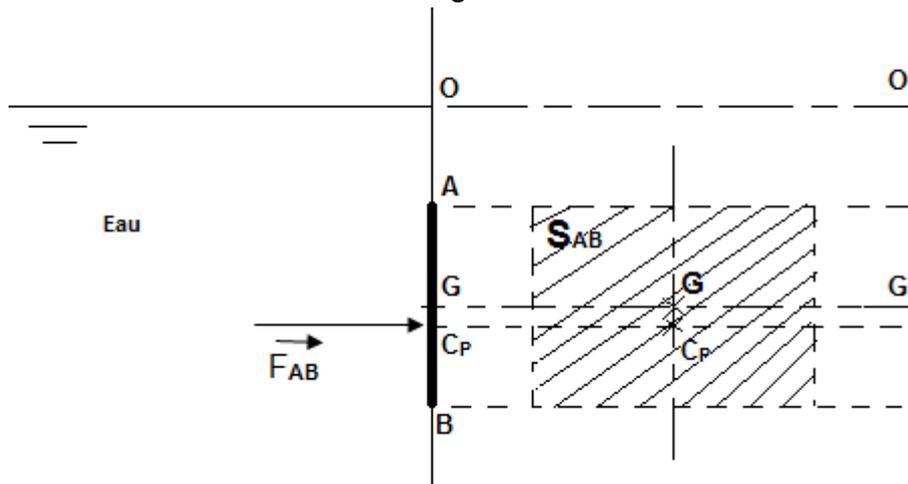
$I_{S_{AB}/G'G}$ est le moment d'inertie de la surface pressée S_{AB} par rapport à l'axe GG' . Cet axe passant par G, le centre de gravité de S_{AB} , est parallèle à l'axe OO' , de trace O, (l'axe OO' étant l'axe d'intersection du plan de la surface libre du liquide avec le plan contenant la surface S_{AB}).

Remarque :

Le centre de poussée C_P se trouve toujours plus bas que le centre de gravité G de la surface S_{AB} c'est-à-dire : $z_{Cp} = OC_P > OG = z_G$

Exemple d'application :

On considère une surface plane S_{AB} , de forme rectangulaire (de longueur L et de largeur l), en contact avec de l'eau, comme le montre la figure suivante :



Déterminer la résultante vectorielle des forces de pression F_{AB} exercée par l'eau sur la surface plane S_{AB} .

Application numérique :

$$OA = 2 \text{ m} ; L = 4 \text{ m} ; l = 2 \text{ m} ; \rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg / m}^3 ; g = 9,81 \text{ m / s}^2.$$

Solution :

Cette résultante est définie par :

- ✓ Une direction perpendiculaire à la surface S_{AB} , donc horizontale dans ce cas (—) ;
- ✓ un sens allant du liquide vers la surface, donc de droite à gauche dans ce cas (—>) ;
- ✓ un module tel que : $F_{AB} = P_G \cdot S_{AB} = \rho_{\text{liquide}} \cdot g \cdot z_G \cdot S_{AB}$

Or:

$$z_G = OG = AO + OG$$

Dans ce cas, la surface étant rectangulaire, $OG = AB / 2 = l / 2 = 2 / 2 = 1 \text{ m}$.

Donc $z_G = OG = 2 + 1 = 3 \text{ m}$.

$$\implies F_{AB} = 1000 \cdot 9,81 \cdot 3 \cdot (4 \cdot 3) = 353\,160 \text{ N} = 353,160 \text{ kN}.$$

✓ un point d'application noté C_P et positionné par sa profondeur z_{C_P} telle que :

$$z_{C_P} = OC_P = \frac{I_{S_{AB}/G'G}}{z_G \cdot S_{AB}} + z_G .$$

$$I_{S_{AB}/G'G} = L \cdot l^3 / 12 = 4 \cdot 2^3 / 12 = 2,67 \text{ m}^4$$

$$z_{C_P} = OC_P = \frac{I_{S_{AB}/G'G}}{z_G \cdot S_{AB}} + z_G = \frac{2,67}{3 \cdot (4 \cdot 2)} + 3 = 3,11 \text{ m}.$$

vérification :

$$z_{C_P} = OC_P = 3,11 \text{ m} > 3 \text{ m} = OG = z_G$$

Attention !

Dans l'exemple ci-dessus, la surface S_{AB} était rectangulaire. Lorsque la forme de la surface S_{AB} change (devient triangulaire par exemple, ou autre), son centre de gravité G , sa profondeur $z_G = OG$ ainsi que son moment d'inertie $I_{S_{AB}/G'G}$ **changent aussi**.