Exercice 3 :
La loi de X est absolument continue (par rapport à la mesure de Lebesgue) et admet la densité

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}.$$

Alors X est de loi normale centrée réduite. La loi de Y est égale à celle de X. Pour calculer la loi de $X+Y$, soit une fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée.

$$\mathbb{E}[g(X+Y)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} g(x+y) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy.$$

Nous utilisons la transformation :

$$(u,v) = (x+y, x-y), \text{c'est-à-dire}(x,y) = \frac{1}{2}(u+v, u-v).$$

Le jacobien $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ est donné par

$$det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Le calcul de $\mathbb{E}[g(X+Y)]$ donne

$$\mathbb{E}[g(X+Y)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} g(x+y) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} g(u) e^{-\frac{u^2+v^2}{4}} \left| \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right| dudv = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} g(u) e^{-\frac{u^2+v^2}{4}} dudv.$$

On peut intégrer d'abord par rapport à v et on rappelle que

$$1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{v^2}{4}} dv.$$

On trouve

$$\mathbb{E}[g(X+Y)] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(u) \exp -\frac{u^2}{4} du,$$

alors $X+Y$ suit la loi normale centrée de variance 2 $\mathcal{N}(0,2)$.
On observe qu'on obtient également que $X - Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0,2)$.
Déterminons enfin la loi de $X^2 + Y^2$. On procède de la même manière que pour déterminer la loi de X + Y. DE même et en passant en coordonnées polaires à la transformation :

$$(x,y) = (rcos\theta, rsin\theta)$$

on associe son inverse qui à (r,θ) associe (x,y).
C'est un C^1-difféomorphisme de $R_+^* \times [0, 2\pi[$ dans $R^2 - \{(0,0)\}$. Le jacobien $\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}$ est donné par

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(X^2+Y^2)] &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} g(x^2+y^2) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_+{}^*} \int_0^{2\pi} d\theta g(r^2) r e^{-\frac{r^2}{2}} dr \\
&= \int_{\mathbb{R}_+^*} g(r^2) r e^{-\frac{r^2}{2}} dr = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}_+^*} g(s) e^{-\frac{s}{2}} ds.
\end{aligned}$$

Il s'agit de la densité de la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.

Exercice 4 :
Puisque le vecteur aléatoire (X,Y) admet une densité, chacune des variables X et Y admettent une densité, avec

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)dy \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)dx.$$

On trouve

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y)dy = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{[0,1]}(y)dy = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\int_0^1 dy = \mathbb{1}_[0,1](x).$$

Ainsi, X suit la loi $\mathcal{U}_{[0,1]}$. Le même calcul montre que Y suit également la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.
Pour calculer la loi de Z, considérons une fonction mesurable bornée $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et utilisons le théorème de transfert, on a

$$E[g(Z)] = E[g(XY)] = ZR2g(xy)f(X,Y)(x,y)dxdy = Z[0,1]2g(xy)dxdy.$$

On pose $t = xy$ et on cherche une autre variable u qui dépend de x et de y et telle que l'application

$$(x,y) \longrightarrow (t(x,y), u(x,y))$$

soit bijective, de classe C^1 et admette une fonction réciproque de classe C^1. Par exemple on peut poser $u(x,y) = x$.
Alors la transformation inverse est telle que

$$(t,u) \longrightarrow (x,y) = (u, tu)$$

Remarque : nous devons nous restreindre à $(x,y) \in]0,1] \times [0,1]$ pour assurer que u ne soit pas nul, mais cela suffit puisque c'est, à un ensemble négligeable près, le domaine sur lequel nous intégrons.
Déterminons le domaine dans lequel (t,u) varie lorsque (x,y) décrit $]0,1[^2$ (considérer ce domaine encore un peu plus petit ne change rien à l'intégrale et simplifie le calcul du domaine de (t,u)).
On a $u = x \in]0,1[$ et $t = xy \in]0,x[=]0,u[$. Ainsi,

$$(t,u) \in D = \{(a,b) \in]0,1[^2; a < b\}.$$

De plus, pour tout $(t,u) \in D$, le couple $(x(t,u), y(t,u)) = (u, tu)$ appartient à $]0,1[^2$.
Calcul du jacobien : pour tout $(t,u) \in D$, le jacobien de la transformation (t,u)$\longrightarrow (x(t,u), y(t,u))$ est

$$\frac{D(x,y)}{D(t,u)} = det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{u} & -\frac{1}{u^2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{u}.$$

Ce ci donne

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(\mathbb{Z})] &= \int_{[0,1]^2} g(xy)dxdy = \int_D g(t)\left|\frac{D(x,y)}{D(t,u)}\right| dtdu \\ &= \int_D g(t)\frac{1}{u}dtdu = \int_0^1\int_0^1 g(t)\frac{1}{u}\mathbb{1}_{t<u}dtdu \\ &= \int_0^1 g(t)\left(\int_0^1 \frac{1}{u}\mathbb{1}_{t<u}du\right)dt = \int_0^1 g(t)\left(\int_t^1 \frac{1}{u}du\right)dt \\ &= \int_0^1 g(t)(-logt)dt = \int_{\mathbb{R}} g(t)(-logt)\mathbb{1}_{[0,1]}(t)dt. \end{aligned}$$

La densité de la loi de $Z = XY$ est donc

$$f_Z(t) = -logt \mathbb{1}_{[0,1]}(t).$$

Exercice 5 :
1. S'il existe, ce réel c est l'unique réel tel que la fonction $f_{(X,Y)}$ soit positive et telle que son intégrale sur $\mathbb{R}^2$ par rapport à la mesure de Lebesgue vaille 1. La fonction $f_{(X,Y)}$ est positive.

$$1 = \int_{\mathbb{R}_+{}^2} cx^{k-1}y^{l-1}e^{-\theta(x+y)}dxdy = c\int_{\mathbb{R}_+} x^{k-1}e^{-\theta x}dx \int_{\mathbb{R}_+} y^{l-1}e^{-\theta y}dy.$$

On montre, par récurrence sur $n \geq 0$ et en utilisant une intégration par parties pour passer d'un rang au suivant, que

$$\forall n \geq 0, \int_{\mathbb{R}_+} x^n e^{-x}dx = n!.$$

Ensuite par un changement de variables linéaires, on en déduit que les intégrales plus haut valent respectivement

$$(k-1)!\theta^{-k} \quad \text{et} \quad (l-1)!\theta^{-l}.$$

Ainsi, $c = \frac{\theta^{k+l}}{(k-1)!(l-1)!}$. La loi de X est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, de densité

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)dy = \frac{\theta^k}{(k-1)!}x^{k-1}e^{-\theta x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

Pour $k = 1$, on reconnaît la loi exponentielle de paramètre θ.
2. En utilisant le changement de variables

$$(x,y) = \frac{1}{2}(u+v, u-v), \text{ alors } x+y = u \text{ et } \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{1}{2},$$

pour toute fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(X+Y)] &= \frac{\theta^{k+l}}{(k-1)!(l-1)!}\int_{\mathbb{R}^2} g(x+y)x^{k-1}y^{l-1}e^{-\theta(x+y)}\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}\mathbb{1}_{\{y\geq 0\}}dxdy \\
&= \frac{\theta^{k+l}}{(k-1)!(l-1)!2^{k+l-1}}\int_{\mathbb{R}^2} g(u)(u+v)^{k-1}(u-v)^{l-1}e^{-\theta u}\mathbb{1}_{\{u+v\geq 0\}}\mathbb{1}_{\{u-v\geq 0\}}dudv \\
&= \frac{\theta^{k+l}}{(k-1)!(l-1)!2^{k+l-1}}\int_{\mathbb{R}_+} g(u)e^{-\theta u}\left(\int_{-u}^{u}(u+v)^{k-1}(u-v)^{l-1}\mathbb{1}_{\{u+v\geq 0\}}\mathbb{1}_{\{u-v\geq 0\}}dv\right)du.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $v \geq 0$ et $u - v \geq 0$ équivalent aux conditions $u \geq 0$ et $|v| \leq u$ et $l-1$ intégrations par parties nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_{-u}^{u}(u+v)^{k-1}(u-v)^{l-1}dv &= \frac{(l-1)!(k-1)!}{(k+l-2)!}\int_{-u}^{u}(v+u)^{k+l-2}dv = \frac{(l-1)!(k-1)!}{(k+l-2)!}\int_{0}^{2u} v^{k+l-2}dv \\
&= \frac{(l-1)!(k-1)!}{(k+l-1)!}2^{k+l-1}u^{k+l-1}.
\end{aligned}$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(X+Y)] &= \frac{\theta^{k+l}}{(k-1)!(l-1)!2^{k+l-1}}\int_{\mathbb{R}_+} g(u)e^{-\theta u}\frac{(l-1)!(k-1)!}{(k+l-1)!}2^{k+l-1}u^{k+l-1}du \\
&= \frac{\theta^{k+l}}{(k+l-1)!}\int_{\mathbb{R}_+} g(u)u^{k+l-1}e^{-\theta u}du.
\end{aligned}$$

Ainsi, $X + Y$ suit une loi $\Gamma(\theta, k+l)$.

Exercice 7 :
Soient $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$. En écrivant la définition de la matrice D puis de la covariance, puis en utilisant la linéarité de l'espérance mathématique nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} a_i D_{ij} a_j &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i Cov(X_i, X_j) a_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_i \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])] a_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \mathbb{E}[a_i(X_i - \mathbb{E}[Xi]) a_j (X_j - \mathbb{E}[X_j])] = \mathbb{E}\left[\sum_{i,j=1}^{n} a_i (X_i - \mathbb{E}[X_i]) a_j (X_j - \mathbb{E}[Xj])\right] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i (X_i - \mathbb{E}[X_i]) \sum_{j=1}^{n} a_j (X_j - \mathbb{E}[Xj])\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i (X_i - \mathbb{E}[X_i])\right)^2\right].\end{aligned}$$

La quantité qui nous intéresse est donc l'espérance d'une variable aléatoire positive et intégrable c'est donc un nombre réel positif.

Exercice 3 :
La loi de X est absolument continue (par rapport à la mesure de Lebesgue) et admet la densité

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x, y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}.$$

Alors X est de loi normale centrée réduite. La loi de Y est égale à celle de X. Pour calculer la loi de $X + Y$, soit une fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée.

$$\mathbb{E}[g(X + Y)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} g(x + y) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy.$$

Nous utilisons la transformation :

$$(u, v) = (x + y, x - y), \text{c'est-à-dire} (x, y) = \frac{1}{2}(u + v, u - v).$$

Le jacobien $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ est donné par

$$det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Le calcul de $\mathbb{E}[g(X + Y)]$ donne

$$\mathbb{E}[g(X+Y)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} g(x+y) e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dxdy = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} g(u) e^{-\frac{u^2+v^2}{4}} \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| dudv = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} g(u) e^{-\frac{u^2+v^2}{4}} dudv.$$

On peut intégrer d'abord par rapport à v et on rappelle que

$$1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{v^2}{4}} dv.$$

On trouve

$$\mathbb{E}[g(X + Y)] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} g(u) \exp -\frac{u^2}{4} du,$$

alors $X + Y$ suit la loi normale centrée de variance 2 $\mathcal{N}(0, 2)$.
On observe qu'on obtient également que $X - Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 2)$.
Déterminons enfin la loi de $X^2 + Y^2$. On procède de la même manière que pour déterminer la loi de X + Y. DE même et en passant en coordonnées polaires à la transformation :

$$(x, y) = (rcos\theta, rsin\theta)$$

on associe son inverse qui à (r,θ) associe (x,y).
C'est un C^1-difféomorphisme de $R_+^* \times [0,2\pi[$ dans $R^2 - \{(0,0)\}$. Le jacobien $\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)}$ est donné par

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\theta)} = det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(X^2+Y^2)] &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} g(x^2+y^2)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}_+{}^*}\int_0^{2\pi} d\theta g(r^2)re^{-\frac{r^2}{2}}dr \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^*} g(r^2)re^{-\frac{r^2}{2}}dr = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_+^*} g(s)e^{-\frac{s}{2}}ds.\end{aligned}$$

Il s'agit de la densité de la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.

Exercice 4 :
Puisque le vecteur aléatoire (X,Y) admet une densité, chacune des variables X et Y admettent une densité, avec

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)dy \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)dx.$$

On trouve

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,1]^2}(x,y)dy = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{[0,1]}(y)dy = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\int_0^1 dy = \mathbb{1}_[0,1](x).$$

Ainsi, X suit la loi $\mathcal{U}_{[0,1]}$. Le même calcul montre que Y suit également la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.
Pour calculer la loi de Z, considérons une fonction mesurable bornée $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et utilisons le théorème de transfert, on a

$$E[g(Z)] = E[g(XY)] = ZR2g(xy)f(X,Y)(x,y)dxdy = Z[0,1]2g(xy)dxdy.$$

On pose $t = xy$ et on cherche une autre variable u qui dépend de x et de y et telle que l'application

$$(x,y) \longrightarrow (t(x,y), u(x,y))$$

soit bijective, de classe C^1 et admette une fonction réciproque de classe C^1. Par exemple on peut poser $u(x,y) = x$.
Alors la transformation inverse est telle que

$$(t,u) \longrightarrow (x,y) = (u,tu)$$

Remarque : nous devons nous restreindre à $(x,y) \in]0,1] \times [0,1]$ pour assurer que u ne soit pas nul, mais cela suffit puisque c'est, à un ensemble négligeable près, le domaine sur lequel nous intégrons.
Déterminons le domaine dans lequel (t,u) varie lorsque (x,y) décrit $]0,1[^2$ (considérer ce domaine encore un peu plus petit ne change rien à l'intégrale et simplifie le calcul du domaine de (t,u)).
On a $u = x \in]0,1[$ et $t = xy \in]0,x[=]0,u[$. Ainsi,

$$(t,u) \in D = \{(a,b) \in]0,1[^2 ; a < b\}.$$

De plus, pour tout $(t,u) \in D$, le couple $(x(t,u), y(t,u)) = (u, tu)$ appartient à $]0,1[^2$.
Calcul du jacobien : pour tout $(t,u) \in D$, le jacobien de la transformation (t,u)$\longrightarrow (x(t,u), y(t,u))$ est

$$\frac{D(x,y)}{D(t,u)} = det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{u} & -\frac{1}{u^2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{u}.$$

Ce ci donne

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(\mathbb{Z})] &= \int_{[0,1]^2} g(xy)dxdy = \int_D g(t) \left| \frac{D(x,y)}{D(t,u)} \right| dtdu \\
&= \int_D g(t)\frac{1}{u}dtdu = \int_0^1 \int_0^1 g(t)\frac{1}{u}\mathbb{1}_{t<u}dtdu \\
&= \int_0^1 g(t) \left(\int_0^1 \frac{1}{u}\mathbb{1}_{t<u}du \right) dt = \int_0^1 g(t) \left(\int_t^1 \frac{1}{u}du \right) dt \\
&= \int_0^1 g(t)(-logt)dt = \int_{\mathbb{R}} g(t)(-logt)\mathbb{1}_{[0,1]}(t)dt.
\end{aligned}$$

La densité de la loi de $Z = XY$ est donc

$$f_Z(t) = -logt\, \mathbb{1}_{[0,1]}(t).$$

Exercice 5 :
1. S'il existe, ce réel c est l'unique réel tel que la fonction $f_{(X,Y)}$ soit positive et telle que son intégrale sur $\mathbb{R}^2$ par rapport à la mesure de Lebesgue vaille 1. La fonction $f_{(X,Y)}$ est positive.

$$1 = \int_{\mathbb{R}_+{}^2} cx^{k-1}y^{l-1}e^{-\theta(x+y)}dxdy = c\int_{\mathbb{R}_+} x^{k-1}e^{-\theta x}dx \int_{\mathbb{R}_+} y^{l-1}e^{-\theta y}dy.$$

On montre, par récurrence sur $n \geq 0$ et en utilisant une intégration par parties pour passer d'un rang au suivant, que

$$\forall n \geq 0, \int_{\mathbb{R}_+} x^n e^{-x}dx = n!.$$

Ensuite par un changement de variables linéaires, on en déduit que les intégrales plus haut valent respectivement

$$(k-1)!\theta^{-k} \quad \text{et} \quad (l-1)!\theta^{-l}.$$

Ainsi, $c = \frac{\theta^{k+l}}{(k-1)!(l-1)!}$. La loi de X est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, de densité

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{(X,Y)}(x,y)dy = \frac{\theta^k}{(k-1)!}x^{k-1}e^{-\theta x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

Pour $k = 1$, on reconnaît la loi exponentielle de paramètre θ.
2. En utilisant le changement de variables

$$(x,y) = \frac{1}{2}(u+v, u-v), \;\; \text{alors} \;\; x+y = u \;\; \text{et} \;\; \frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \frac{1}{2},$$

pour toute fonction $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(X+Y)] &= \frac{\theta^{k+l}}{(k-1)!(l-1)!}\int_{\mathbb{R}^2} g(x+y)x^{k-1}y^{l-1}e^{-\theta(x+y)}\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}\mathbb{1}_{\{y\geq 0\}}dxdy \\
&= \frac{\theta^{k+l}}{(k-1)!(l-1)!2^{k+l-1}}\int_{\mathbb{R}^2} g(u)(u+v)^{k-1}(u-v)^{l-1}e^{-\theta u}\mathbb{1}_{\{u+v\geq 0\}}\mathbb{1}_{\{u-v\geq 0\}}dudv \\
&= \frac{\theta^{k+l}}{(k-1)!(l-1)!2^{k+l-1}}\int_{\mathbb{R}_+} g(u)e^{-\theta u}\left(\int_{-u}^{u}(u+v)^{k-1}(u-v)^{l-1}\mathbb{1}_{\{u+v\geq 0\}}\mathbb{1}_{\{u-v\geq 0\}}dv\right)du.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $v \geq 0$ et $u - v \geq 0$ équivalent aux conditions $u \geq 0$ et $|v| \leq u$ et $l-1$ intégrations par parties nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_{-u}^{u}(u+v)^{k-1}(u-v)^{l-1}dv &= \frac{(l-1)!(k-1)!}{(k+l-2)!}\int_{-u}^{u}(v+u)^{k+l-2}dv = \frac{(l-1)!(k-1)!}{(k+l-2)!}\int_{0}^{2u}v^{k+l-2}dv \\ &= \frac{(l-1)!(k-1)!}{(k+l-1)!}2^{k+l-1}u^{k+l-1}.\end{aligned}$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(X+Y)] &= \frac{\theta^{k+l}}{(k-1)!(l-1)!2^{k+l-1}}\int_{\mathbb{R}_+} g(u)e^{-\theta u}\frac{(l-1)!(k-1)!}{(k+l-1)!}2^{k+l-1}u^{k+l-1}du \\ &= \frac{\theta^{k+l}}{(k+l-1)!}\int_{\mathbb{R}_+} g(u)u^{k+l-1}e^{-\theta u}du.\end{aligned}$$

Ainsi, $X+Y$ suit une loi $\Gamma(\theta, k+l)$.

Exercice 7 :

Soient $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$. En écrivant la définition de la matrice D puis de la covariance, puis en utilisant la linéarité de l'espérance mathématique nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n} a_i D_{ij} a_j &= \sum_{i,j=1}^{n} a_i Cov(X_i, X_j) a_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_i \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])] a_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \mathbb{E}[a_i(X_i - \mathbb{E}[Xi])a_j(X_j - \mathbb{E}[X_j])] = \mathbb{E}\left[\sum_{i,j=1}^{n} a_i(X_i - \mathbb{E}[X_i])a_j(X_j - \mathbb{E}[Xj])\right] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^{n} a_i(X_i - \mathbb{E}[X_i])\sum_{j=1}^{n} a_j(X_j - \mathbb{E}[Xj])\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(X_i - \mathbb{E}[X_i])\right)^2\right].\end{aligned}$$

La quantité qui nous intéresse est donc l'espérance d'une variable aléatoire positive et intégrable c'est donc un nombre réel positif.