Introduction

Pour une variable aléatoire réelle X, posons $H = t \in \mathbb{R} : \mathbb{E}(e^{tX}) < \infty$. H est le domaine de définition de la fonction

$$\mathcal{M} : t \longrightarrow \mathbb{E}(e^{tX})$$

On remarque que $0 \in H$ ainsi $H \neq \emptyset$.
La fonction $\mathcal{M}$ ou $\mathcal{M}_X$ ainsi définie est appelée fonction génératrice des moments de la v.a.r. X. Plus exactement il s'agit de la forme exponentielle de la fonction génératrice des moments. Nous verrons en TD qu'il existe également une forme polynomiale d'une telle fonction génératrice. Évidemment il s'agit là de deux fonctions distinctes qui ont un intérêt équivalent.
Exemple :
Soit X la v.a.r absolument continue de fonction de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ donné. Nous avons

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \not{1}\!\!\!\not{1}_{]0,\infty[}(x).$$

alors la fonction génératrice pour la v.a.r. X est définie par :

$$\mathcal{M}_X(t) =: \mathbb{E}(e^{tX} = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} f_X(x) dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{(t-\lambda)x} dx.$$

alors une étude de convergence selon les valeurs de t pour cette dernière intégrale nous permet de conclure :

$$\mathcal{M}_X(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\lambda - t} & \text{si} \quad \lambda < t \\ \infty & \text{si} \quad \lambda \geq t. \end{cases}$$

Ainsi la fonction génératrice pour une v.a.r. de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est

$$\mathcal{M}_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad \text{sur} \quad H =]-\infty, t[.$$

Remarquons d'autre part que le moment d'ordre k de X, $\mathbb{E}(X^k)$, se calcule facilement au moyen de k intégrations par parties,

$$\mathbb{E}(X^k) = \int_0^{infty} x^k \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{k!}{\lambda^k}.$$

Les termes $\frac{1}{k!}\mathbb{E}(X^k)$ sont précisément les coefficients du développement en série entière de la fonction

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_X(t) &= \frac{\lambda}{\lambda - t} = \frac{1}{1 - \dfrac{t}{\lambda}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\lambda^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(X^k)}{k!} t^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\left[\frac{(tX)^k}{k!}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tX)^k}{k!}\right] = \mathbb{E}(e^{tX}). \end{aligned}$$

Généralisation

1. Définition :

On appelle fonction génératrice des moments d'une v.a.r (respectivement vectorielle sur $\mathbb{R}$) X la fonction $\mathcal{M}_X$ définie par

$$\mathcal{M}_X(t) := \mathbb{E}(e^{tX}) \quad \text{respectivement} \quad \mathcal{M}_X(t) := \mathbb{E}(e^{(t,X)})$$

$(.,.)$ étant le produit scalaire de $\mathbb{R}^d$.

2. Proposition :
Supposons que tous les moments $\mathbb{E}(X^k)$ d'une v.a. X soient définis, et que la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(X^k)}{k!} t^k$$

converge, avec un rayon de convergence $R \neq 0$. Alors, pour $|t| < R$, $\mathbb{E}(e^{tX})$ existe et on a

$$\mathcal{M}_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}(X^k)}{k!} t^k, \quad \text{si} \quad |t| < R.$$

3. fonction génératrice des probabilités ou forme polynomiale de la fonction génératrice :
Soit X une v.a. entière. On appelle fonction génératrice des probabilités de X (ou Forme polynomiale de la fonction génératrice), et on note $\mathcal{G}_X$, la fonction

$$\mathcal{G}_X := \mathbb{E}s^X = \sum_{k=0}^{\infty} P_X(k) s^k.$$

Si la v.a. X est à valeurs entières positives, en posant $s = e^t$, nous obtenons que $\mathcal{M}_X(t) = \mathcal{G}_X(s)$ bien définie pour $|s| \leq 1$. Les hypothèses sur la convergence de la série formée à partir des moments n'est utile que pour assurer une représentation de $\mathcal{M}_X$ par une série en puissances entières de t.