4ième chap. Probabilité

4.1 NOTIONS DE BASE ET DEFINITIONS

On appelle ***événement*** tout ce qui se réalise, ou ne se réalise pas, à la suite d'un phénomène aléatoire.

Exemple 4.1 On jette un dé et l'on observe le résultat obtenu.

"Observer le chiffre 3" est un événement

"Observer un chiffre impaire" est un événement

"Observer un chiffre entre 1 et 6" est un ***événement certain***

"Observer un chiffre en dehors de l'ensemble $\{1,2,3,4,5,6\}$" est un ***événement impossible***

Exemple 4.2 Le nombre de voitures, n_i, qui passent par un pont pendant une journée.

" Observer un nombre de voitures, $n_i > 10$ " est un événement

" Observer un nombre de voitures, $n_i = 150$ " est un événement

" Observer un nombre de voitures, $10 < n_i < 150$ " est un événement

" Observer un nombre négative, $n_i < -10$ " est l'événement impossible

" Observer un nombre de voitures, $n_i \in \mathbb{N}$ est un événement certain (n_i est certainement une partie de l'ensemble des entiers positifs $\mathbb{N}$)".

Exemple 4.3 Le caractère t_i (en jour et centième de jour) mesure la durée de vie d'un composant électronique.

" Observer une durée de vie, $t_i > 100\,\text{j}$ " est un événement

" Observer une durée de vie, $t_i = 1000\,\text{j}$ " est un événement

" Observer une durée de vie, $100 < t_i \leq 1000\,\text{j}$ " est un événement

" Observer une durée de vie, $t_i < -10\,\text{j}$ " est un événement impossible (si on ne tient pas compte du sens de déplacement)

" Observer une durée de vie supérieure ou égale à 0 j, c'est à dire $t_i \in \mathbb{R}$" est un événement certain.

L'ensemble fondamental noté Ω est l'ensemble de tous les résultats possibles.

- Ω peut être fini une partie de $\mathbb{N}$ (Exemple 4.1).
- Ω peut être infini une partie de $\mathbb{N}$ (Exemple 4.2).
- L'ensemble fondamental peut être $\Omega = \mathbb{R}$ (distance parcourue)
- Un intervalle de $\mathbb{R}$ (exemple mesure du Ph $\Omega = [0\,,14]$).

Définition

Un ***événement*** constitué d'un seul résultat possible est dit ***événement élémentaire***

Exemple : Les événements élémentaires du jet d'un dé sont {1}, {2}, {3}, {4}, {5}, {6}.

Le ***cardinal d'un événement*** A, noté $\mathrm{Card}A$, est le nombre des événements élémentaires contenus dans l'ensemble A.

$\mathrm{Card}\Omega$ est le nombre de tous les événements élémentaires.

4.2 Operations sur les evenements

4.2.1 Définition

Tout événement est une partie de l'ensemble Ω, on note par $\mathrm{Part}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω.

4.2.2 Propriétés

- $\mathrm{Part}(\Omega)$ est l'ensemble de tous les événements.
- L'événement impossible est désigné par $\varnothing$ et l'événement certain par Ω.

Soient A et B deux événements de Ω, on a alors:

- $A \cup B$ est l'événement soit A soit B soit les deux,
- $A \cap B$ est l'événement à la fois A et B,
- $\overline{A}$ est l'événement non A,
- $A - B$ est l'événement A mais non B.
- Si $A \cap B = \varnothing$ alors A et B sont dit disjoints, ces deux résultats ne peuvent se réaliser en même temps.

4.2.3 Partition de l'ensemble fondamental

On appelle partition de Ω toute famille d'événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ différents de $\varnothing$ et deux à deux disjoints, telle que :

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots = \Omega$$

4.3 PROBABILITE FREQUENTIELLE

4.3.1 Définition

Soit une expérience aléatoire et un ensemble fondamental Ω fini, avec $\mathrm{Card}\Omega = n$.

Si les événements élémentaires E_i ont la même chance d'apparition on dit qu'ils sont équiprobables.

à un événement E_i correspond la probabilité $P(E_i) = \frac{1}{n}, \quad (i = 1,2,\ldots,n)$

à un événement A constitué de k événements élémentaires on fait correspondre $P(A) = \frac{k}{n}$.

4.3.2 Remarque

Chaque fois qu'on dit que l'on choisit au hasard un élément dans un ensemble fondamental fini Ω, on sous entend que les événements élémentaires sont équiprobables.

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorable à la réalisation de A}}{\text{nombre de toute les possibilités}}.$$

Exercice 4.1 On lance deux dés en même temps et l'on s'intéresse à la somme des résultats.

a) Quelle est la probabilité d'avoir une somme égale à 10?

b) Quelle est la probabilité d'avoir une somme supérieure ou égale à 5?

Réponses : L'ensemble fondamental est $\Omega = \{(x, y)/1 \le x \le 6\,; 1 \le y \le 6\}$. C'est l'ensemble des points représentés sur (Fig. 4.1), avec $\mathrm{Card}\Omega = 6^2$.

a) Soit A l'événement : "la somme des résultats est 10".

Les possibilités de A sont l'ensemble des points représentants l'intersection de la droite d'équation $x+y=10$ avec l'ensemble Ω. $A=\{(4,6);(5,5);(6,4)\}$.

La probabilité de A est donnée par : $P(A)=\dfrac{\mathrm{Card}A}{\mathrm{Card}\Omega}=\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$

b) Soit B l'événement : "la somme des résultats est supérieure ou égale à 5".

On remarque qu'il est plus simple de chercher les possibilités de l'événement $\overline{B}$, c'est-à-dire l'ensemble des couples $\{(x,y)\in\Omega \,/\, x+y<5\}$. On trouve que $\overline{B}=\{(1,1);(1,2);(1,3),(2,1);(2,2);(3,1)\}$.

Ainsi, $\mathrm{Card}(\overline{B})=6$ et $P(B)=1-P(\overline{B})=1-\dfrac{\mathrm{Card}(\overline{B})}{\mathrm{Card}\Omega}=1-\dfrac{6}{36}=\dfrac{5}{6}$.

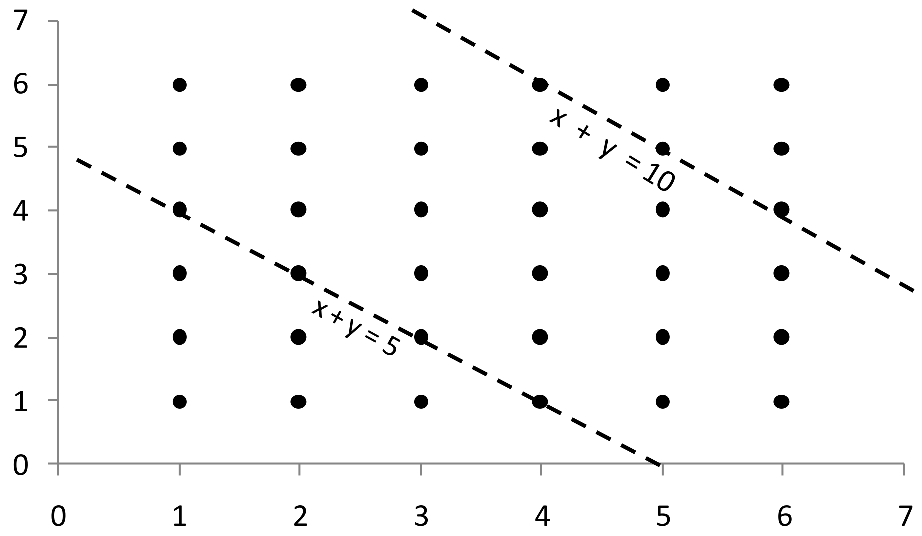

Fig. 4.1 L'ensembles des résultats à la suite d'un jet de deux dés équilibrés

Exercice 4.2 Dans un jeu de 32 cartes, quelle est la probabilité de tirer une carte rouge? Tirer un as? Tirer une carte plus faible que 10?

4.4 DEFINITION AXIOMATIQUE D'UNE PROBABILITE

L'application $P:\mathrm{Part}(\Omega)\to[0\,,\,1]$ est une probabilité si elle vérifie:

1) $P(\Omega)=1$

2) Pour tout ensemble dénombrable d'événements disjoints deux à deux $A_1, A_2, \dots A_n$

$$P(A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_n).$$

4.4.1 Propriétés

Soit P est une probabilité, A et B deux événements, on a alors:

1) $P(\emptyset) = 0$
2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
3) Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$
4) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
5) $P\left(\bigcup_i A_i\right) \leq \sum_i P(A_i)$.

Exemple 4.4

Lors de la fabrication d'un dispositif technique, deux types de défauts peuvent se produire. Un test a montré que 10% des articles ont des défauts de 1^{ere} type, 6% ont des défauts du 2^{ieme} type et 3% ont les deux défauts en même temps.