PROBABILITES CONDITIONNELLES

Compte tenu de l'information qu'un événement particulier B soit déjà réalisé on désire calculer la probabilité d'un événement donné A.

Cette dernière est appelée : Probabilité de l'événement A sachant que B est réalisé.

Elle est notée par $P(A/B)$ qu'on lit aussi probabilité de A si B.

5.1 DEFINITION Soit B un événement de probabilité non nulle. On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le rapport noté:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

5.1.1 Remarques

- Si A et B sont disjoints alors $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = 0$;
- Si $A \cap B \neq \varnothing$, l'ensemble des possibilités de l'expérience n'est plus Ω tout entier, il est plutôt restreint à B.

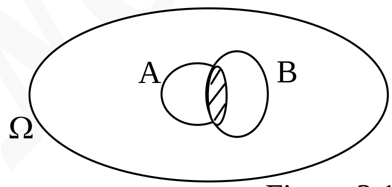

Figure 2.1

0n s'intéresse à la réalisation de A à l'intérieure de B, c'est à dire $A \cap B$ par rapport à B.

- Relativement à l'événement A, on dit que B fournit une information supplémentaire :
  - ✓ L'information est positive si $P(A/B) > P(A)$,
  - ✓ L'information est négative si $P(A/B) < P(A)$.
  - ✓ Si $B \subset A$ alors $P(A/B) = 1$
  - ✓ Si $A \cap B = \varnothing$ alors $P(A/B) = 0$

Exemple 5.1 : Un examen comprend une partie théorique A, et une partie pratique B. 500 personnes se sont présentées à cet examen:

200 personnes ont réussi les parties A et B

100 personnes ont réussi la partie A

50 personnes ont réussi la partie B

a) Quelle est la probabilité qu'une personne prise au hasard ait réussi la partie pratique?
b) Quelle est la probabilité si on sait que cette personne à déjà passé avec succès la partie théorique.

Réponse : $\mathrm{Card}\Omega = 500$ on a :

a) La probabilité qu'une personne ait réussi la partie pratique est : $P(B) = \dfrac{200+50}{500} = 0{,}5$
b) La probabilité qu'une personne ait réussi la partie pratique sachant qu'elle a réussi la partie théorique est donnée par : $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

Or,

$$P(A \cap B) = \frac{200}{500} = 0{,}4 \; ; \qquad P(A) = \frac{200+100}{500} = 0{,}6 \qquad \text{et} \qquad P(B) = \frac{200+50}{500} = 0{,}5$$

Donc $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}4}{0{,}6} = \dfrac{2}{3}$.

On remarque que : $P(B/A) = \dfrac{2}{3} > P(B) = \dfrac{250}{500} = \dfrac{1}{2}$.

Donc le fait de savoir que la personne à déjà réussi l'examen théorique est une information positive

Exemple 5. 2 : On jet un dé équilibré. On désigne les événements suivants :

A : "Obtenir un chiffre pair"

B : "Obtenir un chiffre >4".

Réponse : On trouve que $P(A \cap B) = 1/6$ $\qquad P(B) = 2/6$ $\qquad P(A) = 1/2$

Et que : $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = 1/2$

Dans ce cas tandis que $P(A/B)=P(A)$. La connaissance de B n'a pas influencée A.

5.2 1ière FORMULE DE BAYES

De la définition on a : $P(A/B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A\cap B)=P(A/B)P(B)$

De même on a : $P(B/A)=\dfrac{P(B\cap A)}{P(A)} \Leftrightarrow P(B\cap A)=P(B/A)P(A)$

Or, $P(A\cap B)=P(B\cap A)$

D'où la 1ière formule de Bayes

$$P(B/A)P(A)=P(A/B)P(B)$$

5.3 THEOREME DE PROBABILITE TOTAL

Théorème : Si les événement B_1, B_2, … , B_n constituent une partition de l'ensemble fondamentale Ω, c'est à dire les B_j sont disjoints deux à deux et leurs réunion est égale à Ω, on a alors :

$$P(A)=P(A\cap(B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_n))$$

d'après les propriétés de Morgan

$$P(A)=P((A\cap B_1)\cup(A\cap B_2)\cup\ldots\cup(A\cap B_n))$$

les $A\cap B_j$ sont disjoints deux à deux pour j = 1 ; n.

d'après l'axiome définissant une loi de probabilité, en déduit que

$$P(A)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n}(A\cap B_i)\right)=\sum_{i=1;n}P(A\cap B_i)=\sum_{i=1;n}P(A/B_i)P(B_i)=\sum_{i=1;n}P(B_i/A)P(A)$$

or

$$\forall i=1,\ldots,n \qquad P(A\cap B_i)=P(A/B_i)P(B_i)P(A)=P(B_i/A)P(A)$$

Nous déduisons que

$$P(A/B_i)P(B_i)=P(B_i/A)P(A)$$

On obtient alors la formule :

$$P(B_k/A)=\frac{P(A/B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1;n}P(A/B_i)P(B_i)}$$

Les formules suivantes sont de Bayes. Elles ont pour but d'exprimer $P(B/A)$ en fonction de $P(A/B)$.

1ere formule $P(B/A) = \dfrac{P(A/B)P(B)}{P(A)}$

2ième formule $P(A) = \sum_{i=1;n} P(A/B_i)P(B_i)$

3ième formule $P(B/A) = \dfrac{P(A/B)P(B)}{P(A/B)P(B) + P(A/\overline{B})P(\overline{B})}$ puisque $\Omega = B \cup \overline{B}$

4ième formule Si B_1, B_2, … , B_k est une partition de Ω alors :

$$P(B_k/A) = \frac{P(A/B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1;n} P(A/B_i)P(B_i)}$$