



UNIVERSITE ABOUBEKR BELKAÏD- Tlemcen
Faculté de Technologie
Département de Génie Civil

Résistance des Matériaux

Niveau L2 GC

CHAPITRE IV

Analyse Contrainte- Déformation

Intervenants dans la Matière

Dr. Latefa SAIL

Dr. Souad BENHACHILIF

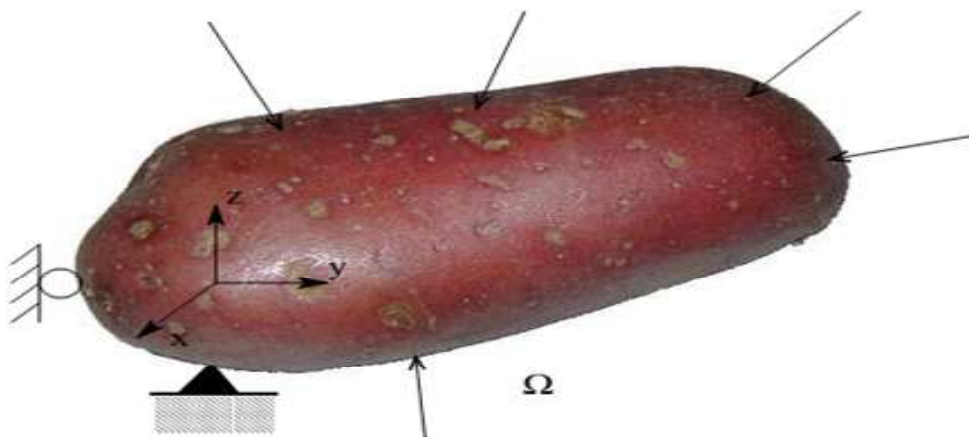
Dr. Naouel DJAFOUR

Mme. Sabah GHEZALI

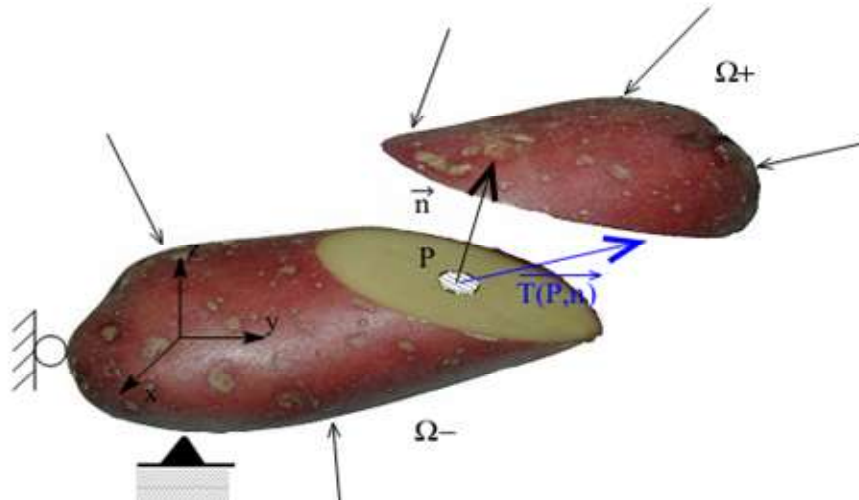
Année Universitaire: 2019/2020

Notion de Contrainte

■ Une contrainte est un effort par Unité de surface qui s'exerce dans le matériau. Soit un solide Ω soumis à des forces (concentrées ou réparties) comme illustré:



Si on coupe Ω par un plan cd normale \vec{n} passant par le point P , les deux parties Ω^+ située du côté de la normale et Ω^- située du côté opposé, sont en équilibre.



Ω^+ est en équilibre sous l'effet:

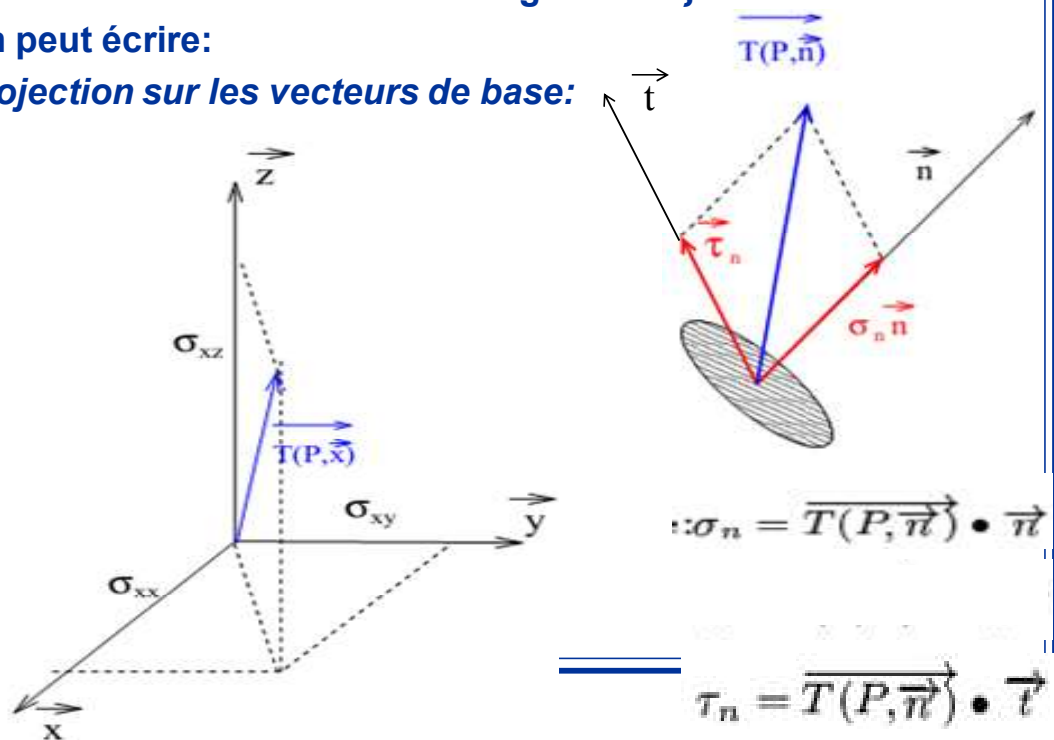
- Des efforts qui lui sont exercés.
- De la contrainte $\vec{T}(P, \vec{n})$ exercée en tout point P du plan de coupure.

$\vec{T}(P, \vec{n})$ est la densité surfacique au point P des efforts exercés par Ω^+ sur Ω^-

Le vecteur contrainte se décompose en une contrainte normale σ_n et une contrainte tangentielle ζ_n .

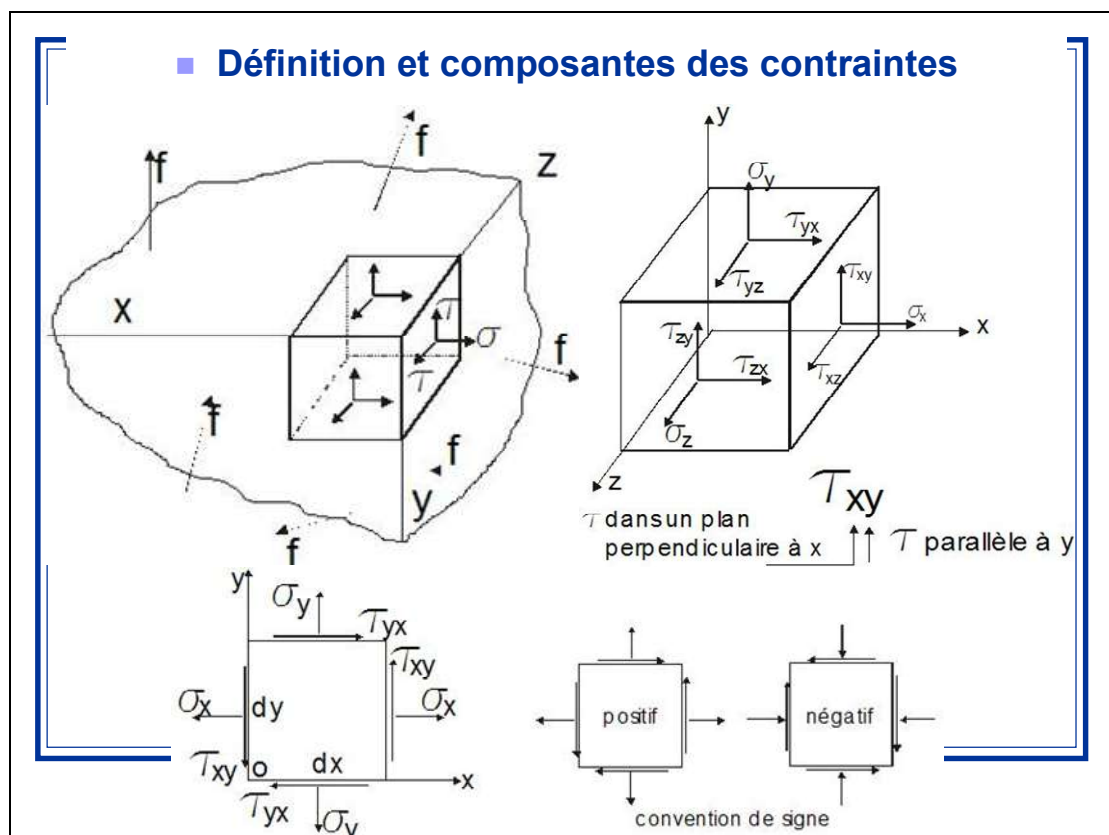
On peut écrire:

Projection sur les vecteurs de base:



- On peut dire qu'une contrainte est une force intérieure appliquée à l'unité de surface au point donné de la section donnée, exprimée en pascal : $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$
- Une contrainte est un outil de calcul; on ne peut pas l'observer directement, par contre on peut observer ses effets: études des déformations par exemple.
- Expérimentalement, on définit pour chaque matériau une contrainte limite admissible, notée $[\sigma]$, au-delà de laquelle la pièce subit des détériorations de ses caractéristiques mécaniques, dimensionnelles, voire une rupture.
- Le calcul de résistance des matériaux consiste à vérifier que les contraintes engendrées par les sollicitations extérieures ne dépassent pas la contrainte limite admissible par le matériau $[\sigma]$.

5



- Nous avons vu précédemment que la contrainte est le rapport d'une force par une surface.
- Les paramètres qui influencent directement une contrainte sont: les sollicitations et la section de la pièce.
- Le champ de contraintes au point M d'un solide est un tenseur symétrique noté $\sigma (M)$.

$$\sigma (M) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

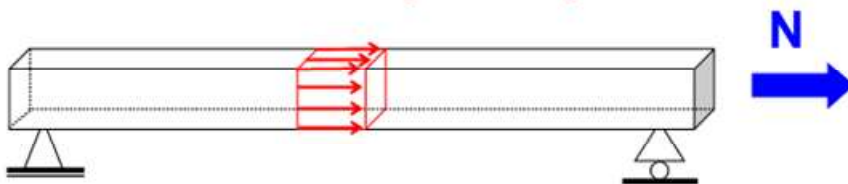
comme $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ pour tout $i \neq j$, $\sigma (M)$ est symétrique, 6 grandeurs représentent donc l'état des contraintes en un point M.

7

Lorsqu'une poutre est soumise à un effort, celle-ci se déforme. Dès lors la matière qui constitue la structure subit des sollicitations que l'on nomme contraintes. Selon le type d'effort, il existe 2 types de contraintes:

- Les contraintes normales notées σ "sigma"
- Les contraintes tangentielles notées ζ "tau"
- ❖ On nomme contrainte normale, une contrainte qui est normale ou perpendiculaire à la section de coupe dans une structure.
- ❖ Elle peut résulter soit d'un effort normal, soit d'un moment de flexion.

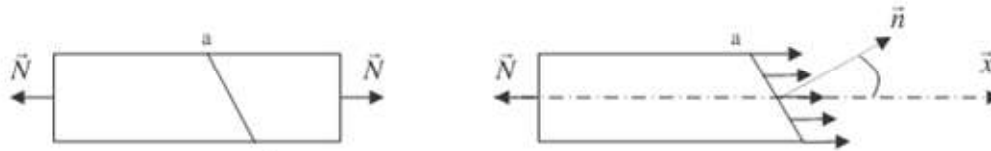
$$\sigma = N / A$$



8

Contraintes sur plans inclinés de traction et compression simples

En étudiant les contraintes dans une poutre soumise à une traction axiale N , nous allons considérer le cas où la section transversale est inclinée sur l'axe.



Toutes les fibres longitudinales ayant le même allongement, la partie gauche de la poutre est en équilibre sous l'action de N et des forces réparties sur la section ab .

Soit S l'aire de section normale à l'axe x de la poutre et φ l'angle que fait cet axe avec la normale n à la section ab ;

l'aire de la section est égale à : $S/\cos\varphi$.

La répartition uniforme des forces sur la section ab permet de d'obtenir la contrainte σ sur cette section :

$$\vec{\sigma} = \frac{\vec{N}}{S/\cos\varphi} = \vec{\sigma}_x \cos\varphi$$

Avec $\vec{\sigma}_x = \frac{\vec{N}}{S}$ représente la contrainte sur la section normale à l'axe de la poutre.

$\vec{\sigma}$ et $\vec{\sigma}_x$ ont la même direction, mais $|\vec{\sigma}| \leq |\vec{\sigma}_x|$.

On dissocie la contrainte totale $\vec{\sigma}$ en deux composantes :

Contrainte normale : $\sigma_n = \sigma \cdot \cos\varphi = \sigma_x \cdot \cos^2\varphi$

Contrainte tangentielle : $\tau = \sigma \cdot \sin\varphi = \sigma_x \cdot \frac{\sin 2\varphi}{2}$

La contrainte normale maximale agit sur les sections normales à l'axe \vec{x} de la poutre :

$$(\sigma_n)_{\max} = \sigma_x \text{ à } \varphi = 0$$

- La contrainte tangentielle maximale agit sur les sections inclinées de 45° sur l'axe de la poutre :

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}\sigma, \text{ à } \varphi = \pi/4$$

Ces formules calculées pour une poutre en traction, peuvent aussi être utilisées en compression.

Par convention, la contrainte de traction (suivant l'axe \vec{x}) est supposée positive, la compression sens opposé à l'axe \vec{x}) négative.

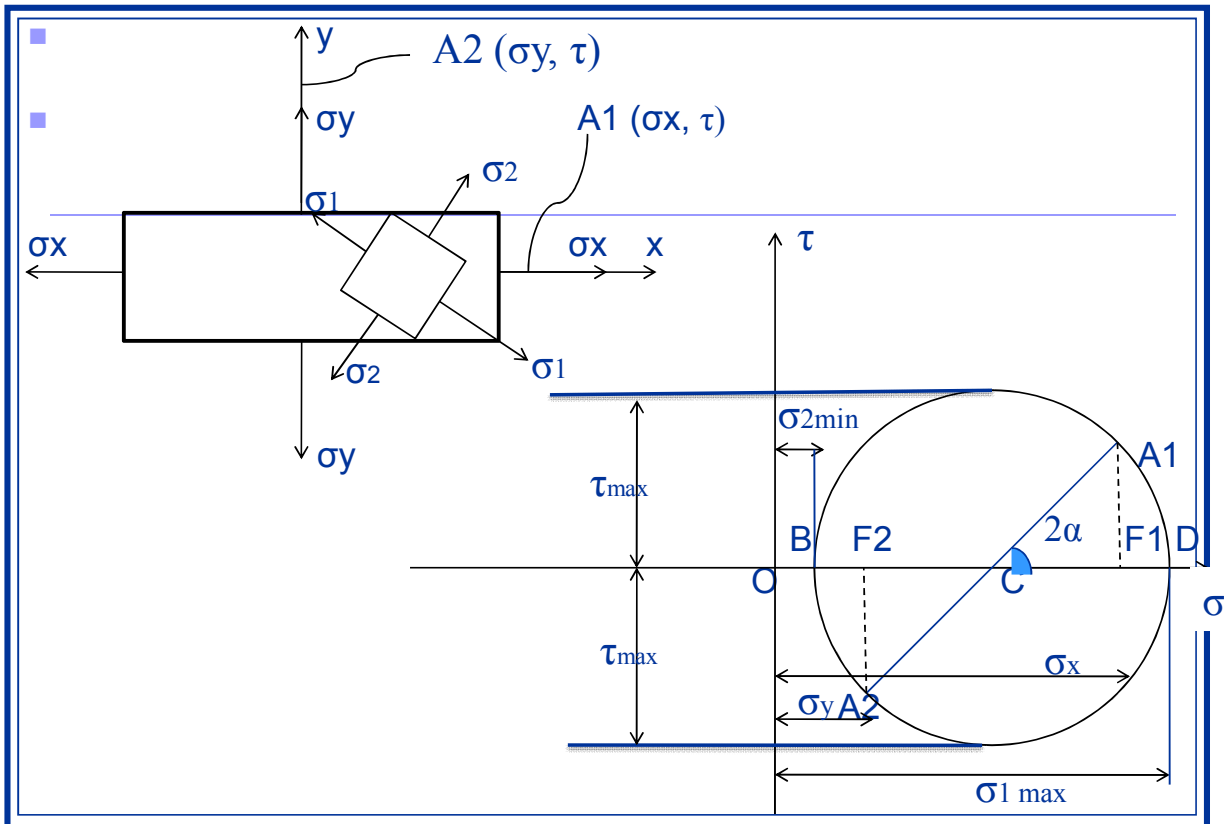
Contraintes principales

Il existe un repère dans lequel σ (M) est de la forme:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}_{R_{\max}}$$

- Les contraintes dans ce repère sont les contraintes principales.
- Elles correspondent aux valeurs propres de la matrice σ (M) .
- Dans le repère principale, un élément de matière ne subit pas de cisaillement, mais seulement traction ou compression.

11



12

σ_1 et σ_2 s'appellent contraintes principales et les plans sur les quelles elles s'exercent s'appellent plans principaux, la caractéristique de ces plans est que $\tau = 0$.

* $\sigma_1 = OD = OC+CD$ $OC = OF_2+F_2C = OF_2 + (OF_1 - OF_2)/2$

$CD = CA_1$ $OC = (OF_1 + OF_2)/2$

$$CD = \sqrt{CF_1^2 + F_1A_1^2} = \sqrt{\left(\frac{OF_1 - OF_2}{2}\right)^2 + F_1A_1^2}$$

$$\sigma_1 = \frac{OF_1 + OF_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{OF_1 - OF_2}{2}\right)^2 + F_1A_1^2}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

* $\sigma_2 = OB = OC-CB$ ($CB=CD$)

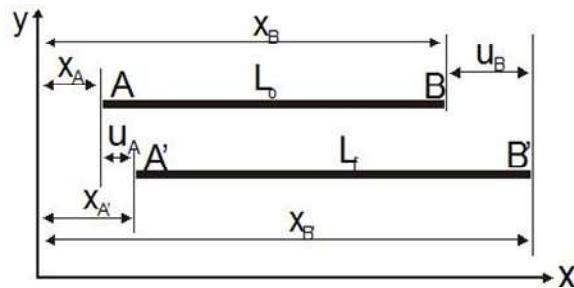
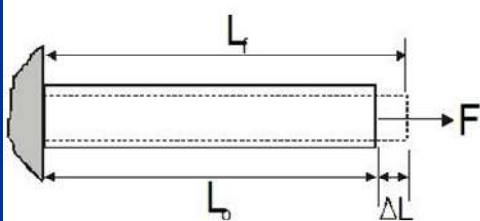
$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\tau}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}$$

$\tan 2\alpha = F_1A_1/CF_1$

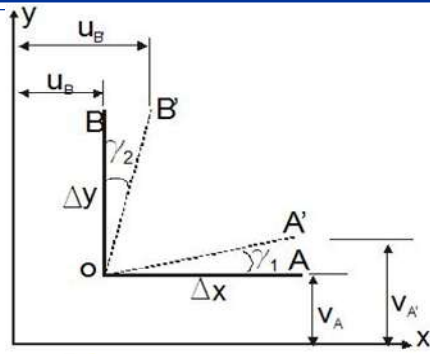
$$|\tau_{\min}| = \tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

Définition et composantes des déformations



$$\varepsilon = \frac{L_f - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L}{L_0}$$

$$\varepsilon = \frac{u_B - u_A}{L_0}$$



Les angles sont petits :

$$\gamma = (\gamma_1 + \gamma_2) = \tan \gamma_1 + \tan \gamma_2 = \frac{v_{A'} - v_A}{\Delta X} + \frac{u_{B'} - u_B}{\Delta Y}$$

• DÉFORMATIONS EN UN POINT

Plan xy : $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}\gamma_{yx}$

Espace : $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \frac{1}{2}\gamma_{xy}, \frac{1}{2}\gamma_{yz}, \frac{1}{2}\gamma_{zx}$

Comme dans le cas des contraintes, le champ de déformations au point M d'un solide est donc un tenseur de rang 2 symétrique noté $\epsilon(M)$. Il y a donc 6 grandeurs représentant les déformations (3 translations et 3 rotations).

$$\epsilon(M) = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}_R$$

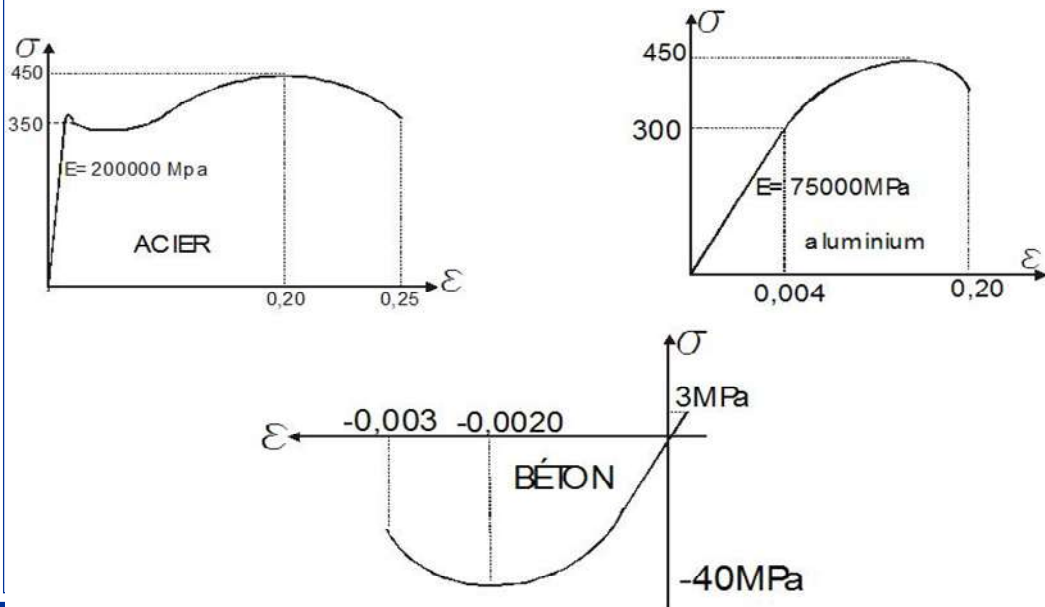
Déformations principales

Il existe un repère dans lequel $\epsilon(M)$ est de la forme:

Les déformations dans ce repère sont les déformations principales. Elles correspondent aux valeurs propres de la matrice $\epsilon(M)$.

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}_{R_{\text{prin}}}$$

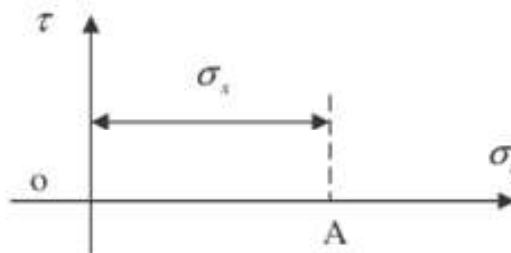
Courbe contrainte-déformation



15

Cercle de MOHR.

■ Le cercle de MOHR est une représentation graphique des états de contraintes normales et tangentielles; pour cela on considère un système de coordonnées rectangulaires d'origine o.



■ On choisit une échelle sur les contraintes et on porte les composantes normales sur l'axe horizontal et les composantes tangentielles sur l'axe vertical.

■ Soit A, d'abscisse égale à σ_x et d'ordonnée τ représente la contrainte agissant sur le plan $\varphi = 0$,

■ Soit o représente le plan $\varphi = \pi/2$, pour lequel deux composantes de la contrainte disparaissent.

16

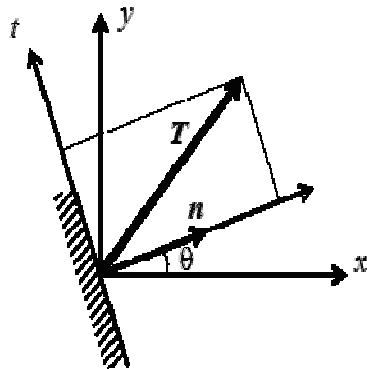
Cercle de MOHR

Définition & Démonstration

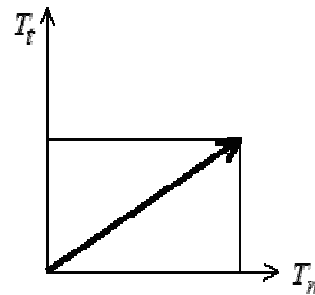
On considère un état de contrainte bidimensionnel et une facette de normale n . La direction tangentielle t est choisie orientée à $+\pi/2$ de n .

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

($\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$)



Plan Physique



Plan de Mohr

17

Cercle de MOHR

Le vecteur contrainte T associé à cette facette est donc, dans le repère (x, y) (plan physique),

$$T = \begin{cases} \sigma_{11} \cos \theta + \sigma_{12} \sin \theta = T_x \\ \sigma_{21} \cos \theta + \sigma_{22} \sin \theta = T_y \end{cases}$$

puis, dans le repère (n, t) (plan de Mohr),

$$T_n = T \cdot \mathbf{n} = \sigma_{11} \cos^2 \theta + 2\sigma_{12} \sin \theta \cos \theta + \sigma_{22} \sin^2 \theta$$

$$T_t = T \cdot \mathbf{t} = (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{12} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

soit, en réarrangeant les termes,

$$T_n = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \cos 2\theta + \sigma_{12} \sin 2\theta$$

$$T_t = -\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \sin 2\theta + \sigma_{12} \cos 2\theta$$

18

- Dans le plan (T_n, T_t) le point correspondant décrit, lorsque θ varie, le cercle de Mohr :

$$\text{Centre : } \left(\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}, 0 \right) \quad \text{Rayon : } \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2}$$

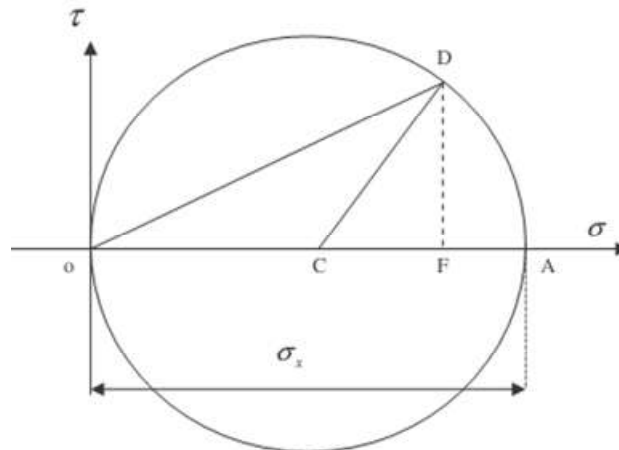
- Le cercle appelé cercle des contraintes ou cercle de MOHR, est aussi utilisé pour résoudre le problème inverse, c'est-à-dire lorsqu'il faut calculer la contrainte de traction σ_x suivant la direction axiale et l'angle φ connaissant les composantes σ_x et τ .

autour du point x. Si l'angle entre la facette et l'axe des x est α dans l'espace physique réel, l'état de contrainte sur cette facette sera représenté par le point faisant un angle 2α avec l'axe des σ dans l'espace (σ, τ) . La contrainte de cisaillement maximale vaut

$$\tau_{\max} = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) / 2.$$

19

Traçant le cercle de diamètre oA on connaît aisément que les composantes de la contrainte, pour toute section ab et pour un plan φ pris arbitrairement, peuvent être représentées par les coordonnées d'un point du cercle.



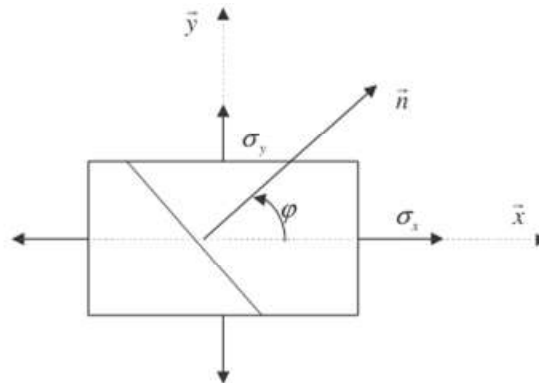
$$\sigma_n = \overline{OF} = \overline{OC} + \overline{CF} = \frac{1}{2}\sigma_x + \frac{1}{2}\sigma_x \cos 2\varphi = \sigma_x \cos^2 \varphi$$

$$\tau = \overline{FD} = \overline{CD} \cdot \sin 2\varphi = \frac{1}{2}\sigma_x \sin 2\varphi$$

20

Traction ou compression suivant deux directions perpendiculaires

■ Dans certains cas, le matériau d'une construction est soumis à l'action d'une traction ou d'une compression suivant deux directions perpendiculaires.



■ Dans le cas général, on considère la contrainte agissant sur une section transversale quelconque ab, perpendiculaire au plan (xy) et dont la normale n fait un angle φ avec l'axe x.

21

Les composantes normale et tangentielle dues à σ_x sont données par :

$$\sigma'_n = \sigma_x \cos^2 \varphi$$

$$\tau' = \frac{1}{2} \sigma_x \sin 2\varphi$$

Pour calculer les composantes normale et tangentielle dues à σ_y , on remarque que :

$$\text{L'angle } (\vec{\sigma}_y, \vec{n}) = \frac{\pi}{2} - \varphi$$

Le sens positif des angles est le sens trigonométrique.

On remplace donc, σ_x par σ_y et φ par $\frac{\pi}{2} - \varphi$ pour avoir :

$$\sigma = \sigma_y \cdot \sin^2 \varphi ; \tau' = -\frac{1}{2} \sigma_y \cdot \sin 2\varphi$$

Les contraintes résultantes normale et tangentielle sur un plan incliné, dans le cas d'une traction suivant deux directions perpendiculaires.

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi$$

$$\tau = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi$$

TD – EXERCICES

Exercice 1.

Une tige rectiligne de section rectangulaire $s = 100 \times 30 \text{ mm}^2$ est sollicitée par un effort normal $N = 4 \cdot 10^5 \text{ N}$.

1- Déterminer les contraintes sur la facette ab par la méthode analytique et par le cercle de Mohr dans le cas suivants :

a/ N est un effort de traction et $\varphi = 60^\circ$.

b/ N est un effort de compression et $\varphi = 120^\circ$

24

Solution

a/ Cas de traction :

Par la méthode analytique :

$$\sigma_x = N / S$$

$$\sigma = \sigma_x \cdot \cos \varphi \rightarrow \sigma_n = \sigma \cdot \cos \varphi = \sigma_x \cdot \cos^2 \varphi$$

$$\sigma_x = 4 \cdot 10^5 / 100 \times 30 \rightarrow \sigma_x = 133,33 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_n = \sigma_x \cdot \cos^2 \varphi \rightarrow \sigma_n = 33,33 \text{ N/mm}^2$$

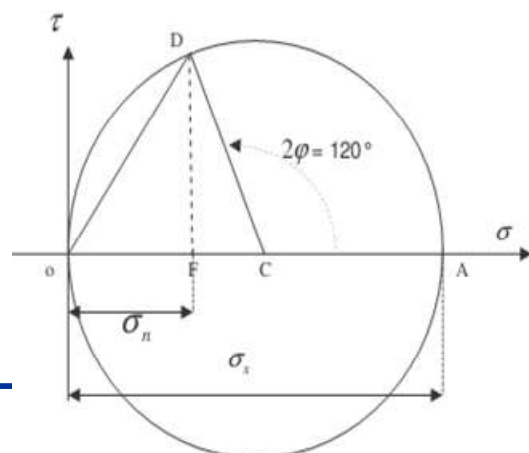
$$\tau = \sigma_x \frac{\sin 2\varphi}{2} \rightarrow \tau = 57,73 \text{ N/mm}^2$$

Par le cercle de MOHR:

$$C = \left(\frac{\sigma_x}{2}, 0 \right)$$

$$R = \frac{\sigma_x}{2}$$

$$\overline{OF} = \sigma_n, \quad \overline{OA} = \sigma_x \text{ et } 2\varphi = 120^\circ$$



$$\overline{OF} = \overline{OC} - \overline{FC}$$

$$\sigma_n = \overline{OF} = R - R \cos \beta = R - R \cos(\pi - 2\varphi) = R - R \cos 60 = 33,33 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau = \overline{FD} = \overline{CD} \sin \beta = R \sin 60 = \frac{\sigma_x}{2} \sin 60 = 57,73 \text{ N/mm}^2$$

b/ Cas de la compression:

$$\sigma_x = -N/S$$

$$\sigma = \sigma_x \cdot \cos \varphi \rightarrow \sigma_n = \sigma \cdot \cos \varphi = \sigma_x \cdot \cos^2 \varphi$$

$$\sigma_x = -4 \cdot 10^5 / 100 \times 30 \rightarrow \sigma_x = -133,33 \text{ N/mm}^2$$

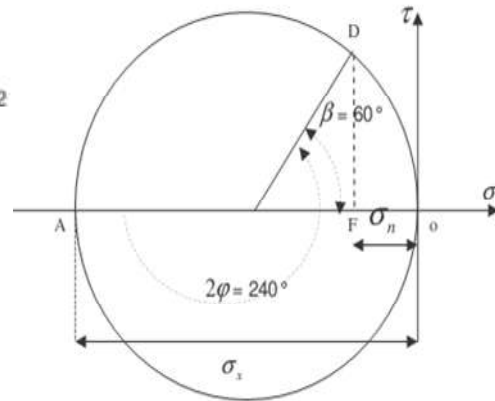
$$C = \left(\frac{\sigma_x}{2}, 0 \right)$$

$$R = \frac{\sigma_x}{2}$$

$$\overline{OF} = \sigma_n, \overline{OA} = \sigma_x \text{ et } 2\varphi = 120^\circ$$

$$\overline{OF} = \overline{OC} - \overline{FC} = -R + R \cos 60$$

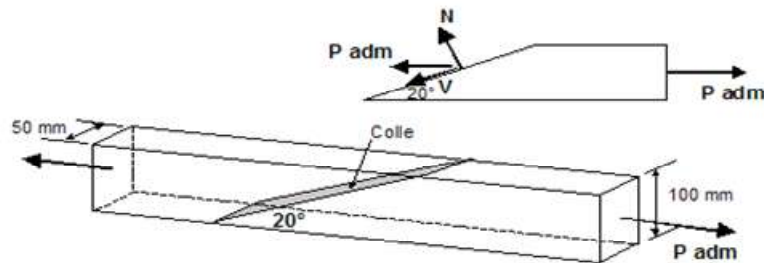
$$\tau = R \sin 60$$



26

Exercice 2.

Calculer P_{adm} si $\sigma_{adm} = 2 \text{ MPa}$ et $\tau_{adm} = 1,5 \text{ MPa}$



Notez que $\sin 20 = \cos 70$ et $\cos 20 = \sin 70$

$$A_{résistant} = (50 \times 100) / \sin 20 = 14620 \text{ mm}^2$$

$$N_{adm} = P_{adm} \cdot \sin 20, \quad V_{adm} = P_{adm} \cdot \cos 20$$

$$\sigma_{adm} = \frac{N_{adm}}{A_R} = \frac{P_{adm} \cdot \sin 20}{A_R} \Rightarrow P_{adm} = \frac{\sigma_{adm} \cdot A_R}{\sin 20} = 85,5 \text{ kN}$$

$$\tau_{adm} = \frac{V_{adm}}{A_R} = \frac{P_{adm} \cdot \cos 20}{A_R} \Rightarrow P_{adm} = \frac{\tau_{adm} \cdot A_R}{\cos 20} = 23,3 \text{ kN}$$

donc $P_{adm} = 23,3 \text{ kN}$

Exercice 3.

La tige de commande d'une machine a une section rectangulaire ou : $h/b = 2$. Cette tige est sollicitée à la traction par une force $F = 20 \text{ N}$. $\sigma_{\text{admissible}} = 20 \text{ KN/m}^2$

1. Dimensionner la tige et calculer la contrainte normale effective (σ_x, τ).
2. Déterminer la contrainte normale et de cisaillement agissant sur un plan incliné à 30° de l'axe des x.

Solution:

1. $\sigma = F/S = F/2b^2$ $\sigma < \sigma_{\text{admissible}}$ d'où: $F/2b^2 < 20 \cdot 10^3$

$$b > \sqrt{\frac{F}{2 \sigma_{\text{adm}}}} = \sqrt{\frac{20 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 20}} = 22,3 \text{ cm} \text{ on prend } b = 25 \text{ cm}$$

$$\sigma_x = F/2b^2 = 20 / 2 \cdot (0,25^2) = 160 \text{ Pa}$$

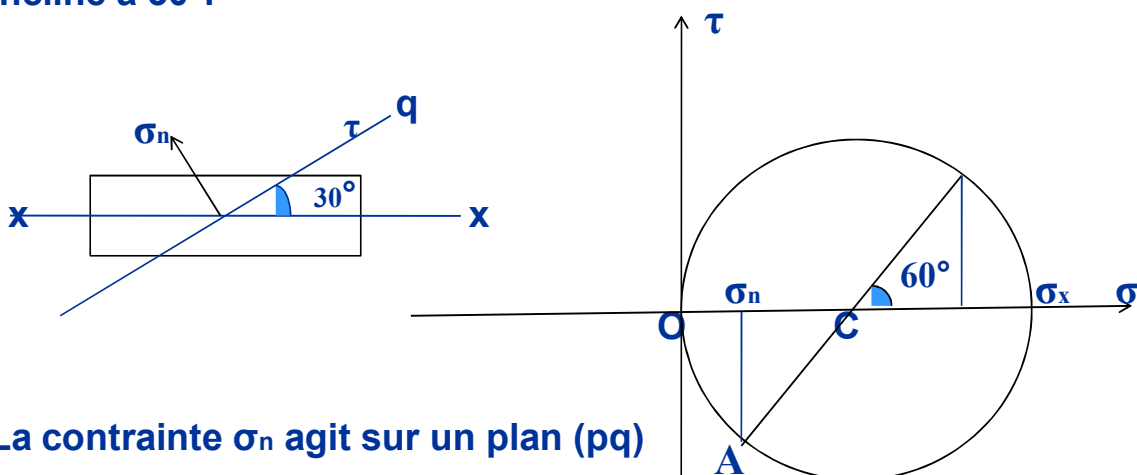
$$\tau = 0 \text{ (contrainte principale)}$$



28

Solution EX0 3 Suite:

2. Contrainte normale et de cisaillement agissant sur un plan incliné à 30° .



La contrainte σ_n agit sur un plan (pq)
Incliné à 30° par rapport à (xx)

Sur la présentation au cercle de Mohr, l'angle 30° devient $2 \times 30 = 60^\circ$, et ainsi la contrainte σ_n agit sur un angle = $2(30 + \pi/2)$, représenté par le point A ($60 + \pi$)

29

Solution EX0 3 Suite:

$$OC = R = \sigma_x / 2 \quad CF = R \cos 60$$

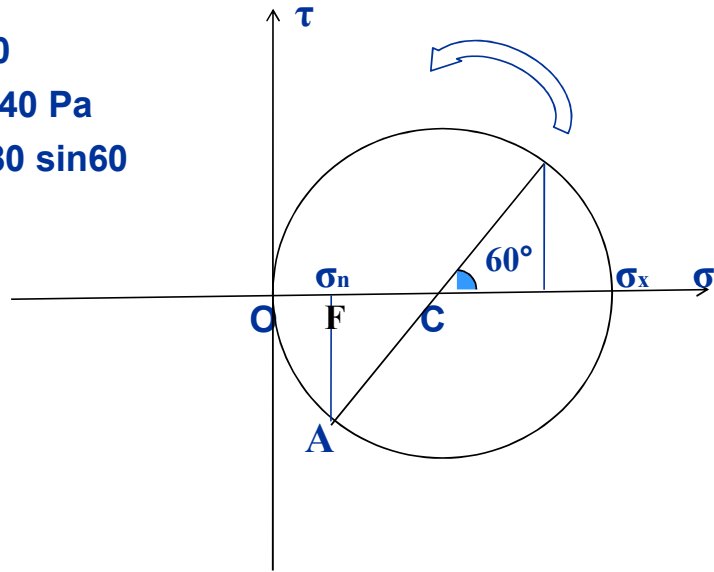
$$\sigma_n = OF = OC - CF$$

$$\sigma_n = \sigma_x / 2 - \sigma_x / 2 \cos 60$$

$$\sigma_n = 80 - 80 \cos 60 = 40 \text{ Pa}$$

$$\tau = -AF = R \sin 60 = 80 \sin 60$$

$$\tau = 69,28 \text{ Pa}$$

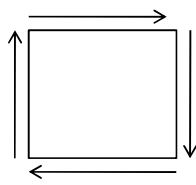


30

Exercice 4.

- Sur les deux cotés perpendiculaires de l'extrémité de la figure ci-dessous agissant les contraintes normales $\sigma_{n1} = 843,6$ bars et $\sigma_{n2} = 421,8$ bars.
- Déterminer σ_x et τ_1 .

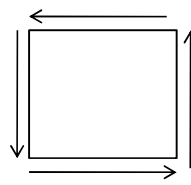
Solution



$$\tau > 0$$

Même direction

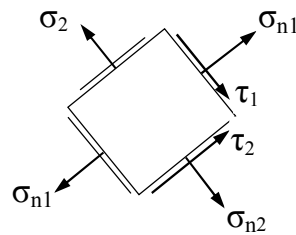
des aiguilles d'une montre



$$\tau < 0$$

inverse de la direction des aiguilles

d'une montre



31

$$2\alpha = \pi + 60^\circ$$

$$\sigma_n = OF = -(OC - CF)$$

$$OC = R = \sigma_x/2$$

$$CF = R \cos 60$$

$$\sigma_n = -(\sigma_x/2 - \sigma_x/2 \cos 60)$$

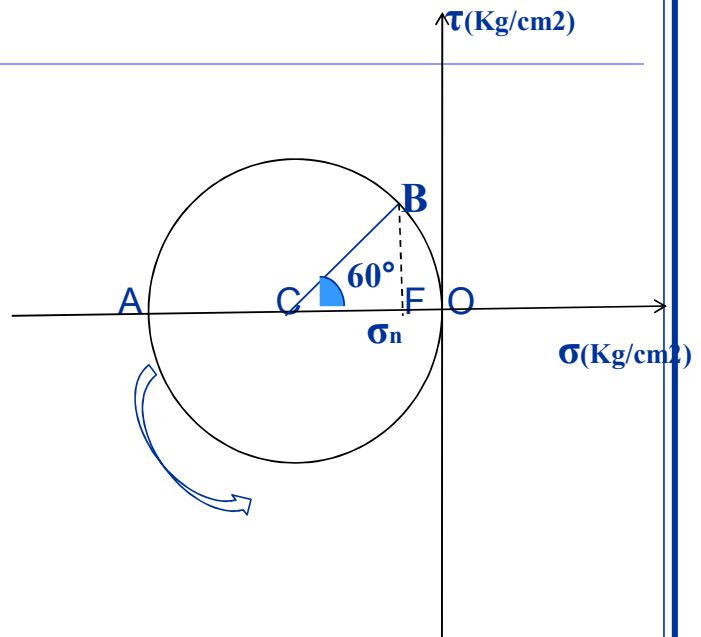
$$\sigma_n = -(87,5/2 - 87,5/2 \cos 60)$$

$$\sigma_n = -21,875 \text{ Kg/cm}^2$$

$$\tau = FB = R \sin 60$$

$$\tau = 87,5/2 \sin 60$$

$$\tau = 37,88 \text{ Kg/cm}^2$$



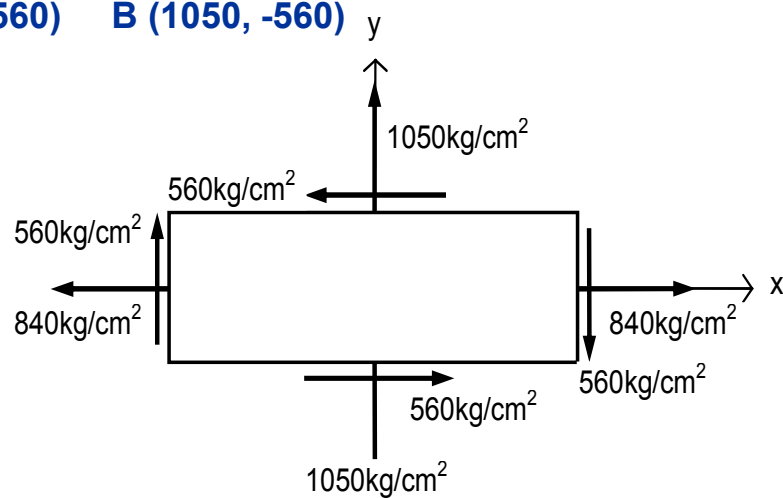
36

■ Exercice 6

■ Un élément plan est soumis aux contraintes représentées sur la figure ci-dessous.

■ Déterminer les contraintes principales et leurs directions.

σ_x	τ	σ_y	τ
A (840, 560)		B (1050, -560)	



37

Solution

$$\sigma_1 = OF = OC + CF$$

$$OC = OA + AC$$

$$OC = \sigma_x + (\sigma_y - \sigma_x)/2 = (\sigma_x + \sigma_y)/2$$

$$CF = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

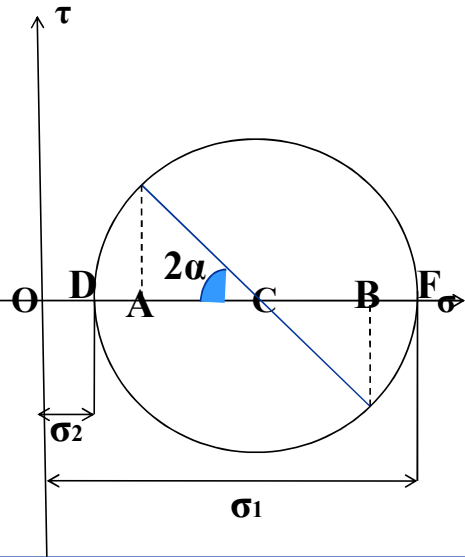
$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma_2 = OC - R$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\begin{aligned} \tan 2\alpha &= \frac{AC}{2\tau} = \frac{\tau}{\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}} \\ &= \frac{2\tau}{\sigma_y - \sigma_x} \end{aligned}$$

$$\alpha = \text{Arctang} \frac{2\tau}{\sigma_y - \sigma_x}$$



38

- Application numérique:
- $\sigma_1 = 1514,758 \text{ Kg/cm}^2$
- $\sigma_2 = 375,24 \text{ Kg/cm}^2$

39