Préambule :

Dans le fichier (DIAPOS) j'avais donné l'énoncé et la preuve d'un des théorèmes de convergence de THIEME ainsi qu'un exemple d'application.

C'était le Chemostat avec Compétition, mais avec le choix des fonctions $\mu_1(\cdot)$ et $\mu_2(\cdot)$ de type Monod.

Je propose ici la reprise de cet exemple mais avec μ_1 et μ_2 quelconques, positives et strictement croissantes.

Ce qui vous est demandé :

→ Bien lire le théorème de Thieme (il vous faut vous habituer au langage des systèmes dynamiques en termes de variétés stables et instables)

→ Bien lire la preuve et essayer de la comprendre de votre mieux ! (Sinon, on en reparlera inchallah)

→ Très bien comprendre l'application au modèle de compétition des diapos.

→ La rédiger pour le cas où μ_i sont généraux monotones.

N'HÉSITEZ PAS À ME CONTACTER

Pour rappel, on avait regardé le modèle de compétition dans un chemostat

$$(C)\begin{cases} \dot{S} = D(S_{in} - S) - \mu_1(S)x_1 - \mu_2(S)x_2 \\ \dot{x}_1 = (\mu_1(S) - D)x_1 \\ \dot{x}_2 = (\mu_2(S) - D)x_2 \end{cases}$$

sous les hypothèses :

H1 : μ_i sont C^1 ; $\mu_i(0) = 0$, $\mu_i'(S) > 0 \;\forall S \geq 0$

H2 $\mu_i(S_{in}) > D \;\forall i = 1, 2$

H3 $\lambda_1 < \lambda_2$ où $\lambda_i = \mu_i^{-1}(D)$.

Je vous avais laissé comme exercice l'étude du système (C) dans l'espace de dimension 3, $\{(S, x_1, x_2)\}$

Nous avons entamé l'approche par "réduction" en posant

$\Sigma(t) = S(t) + x_1(t) + x_2(t) - S_{in}$

d'où $\dot{\Sigma}(t) = (\ldots) = -D\Sigma(t)$, d'où le système équivalent dans l'espace $\{(\Sigma, x_1, x_2)\}$

$$\begin{cases} \dot{\Sigma} = -D\Sigma \\ \dot{x}_i = (\mu_i(\Sigma - x_1 - x_2 + S_{in}) - D)x_i \quad , i = 1, 2 \end{cases}$$

Comme la première équation ~~est résolue~~ a pour solution $\Sigma(t) = \Sigma(0)e^{-Dt}$, on obtient le système asymp. autonome

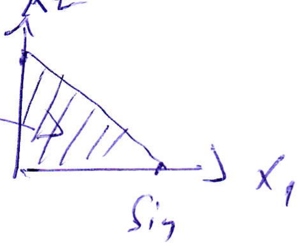
$$(A)\begin{cases} \dot{x}_1 = (\mu_1(\Sigma(0)e^{-Dt} - x_1 - x_2 + S_{in}) - D)x_1 \\ \dot{x}_2 = (\mu_2(\Sigma(0)e^{-Dt} - x_1 - x_2 + S_{in}) - D)x_2 \end{cases}$$

qui a pour système limite ($t \to +\infty$)

$$(2) \begin{cases} \dot{X}_1 = \left(\mu_1(-X_1 - X_2 + S_{in}) - D\right) X_1 \\ \dot{X}_2 = \left(\mu_2(-X_1 - X_2 + S_{in}) - D\right) X_2 . \end{cases}$$

C'est un ~~système~~ modèle de compétition de type Lotka-Volterra.

Rem, comme $S \geq 0 \iff X_1 + X_2 \leq S_{in}$, (2) est en fait défini dans le simplexe fermé
$\{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2_+ , 0 \leq X_1 + X_2 \leq S_{in}\}$



- Les équilibres de (2) :

$E_0 = (0,0)$; $E_2 = (0, S_{in} - \lambda_2)$, $E_1 = (S_{in} - \lambda_1, 0)$

Elles sont tous sur le bord et sont tous positifs d'après l'hypothèse H2.

Noter que s'il existait un équilibre intérieur, il vérifierait

$$\begin{cases} \mu_1(-X_1 - X_2 + S_{in}) = D \\ \mu_2(-X_1 - X_2 + S_{in}) = D \end{cases} \iff \begin{cases} -X_1 - X_2 + S_{in} = \lambda_1 \\ -X_1 - X_2 + S_{in} = \lambda_2 \end{cases}$$

Impossible, car $\lambda_1 \neq \lambda_2$ (H3)

- Étude de la stabilité. Montrer, par linéarisation, que : * $E_0 = (0,0)$ est un noeud répulsif, de variété (séparatrice) stable portée par l'axe des X_1 et la séparatrice instable portée par l'axe des X_2

- E_1 est localement asymptotiquement stable, de variété stable $\mathbb{R}^2_+ \setminus \{E_0, \text{axe}(Ox_2)\}$
- E_2 est un point selle de variété stable l'axe des x_2.

Exercice : expliquer pourquoi E_2 est G.A.S pour toute condition initiale $(x_1(0), x_2(0))$ telle que

$$x_1(0) > 0, \quad x_2(0) \geq 0.$$

Equilibres correspondants de (Σ) :

$$\underset{\Sigma \ \ x_1 \ \ x_2}{\tilde{E}_0 = (0, 0, 0)} \longrightarrow E_0$$

$$\tilde{E}_1 = (0, S_{in} - \lambda_1, 0) \longrightarrow E_1$$

$$\tilde{E}_2 = (\cancel{0, S_{in}-\lambda}\ (0, 0, S_{in} - \lambda_2) \longrightarrow E_2.$$

Equilibres correspondants de (C)

$$\underset{S \ \ x_1 \ \ x_2}{\bar{E}_0 = (S_{in}, 0, 0)} \longrightarrow E_0$$

$$\bar{E}_1 = (\lambda_1, S_{in} - \lambda_1, 0) \longrightarrow E_1$$

$$\bar{E}_2 = (\lambda_2, 0, S_{in} - \lambda_2) \longrightarrow E_2$$

La question du P.L.I se pose entre les systèmes (1) et (2). Elle se lit alors :
Est-ce que les solutions de (C) convergent vers un des équilibres $\bar{E}_0, \bar{E}_1, \bar{E}_2$? Est-ce que $\bar{E}_1$ est GAS (préciser les conditions initiales) ?