

TP N° 8 : Interpolation (polynôme de Newton)

Étant donné $n+1$ couples (x_i, y_i) , le problème consiste à trouver une fonction $\phi(x)$ telle que $\phi(x_i) = y_i$; on dit alors que ϕ interpole $\{y_i\}$ aux nœuds $\{x_i\}$. On parle d'*interpolation polynomiale* quand ϕ est un polynôme.

La méthode de Newton

Le polynôme d'interpolation de Newton de degré n relatif à la subdivision $\{(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ s'écrit :

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1}).$$

Avec

$$P_n(x_i) = y_i = f(x_i)$$

D'après cette définition on a $P_n(x_0) = a_0 = f(x_0)$,
 $P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1) \Rightarrow a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f[x_0, x_1]$

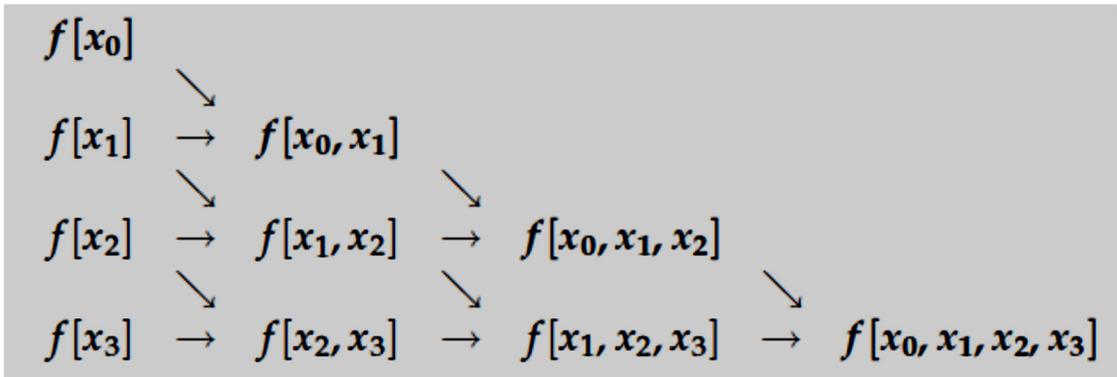
De la même manière

$$a_2 = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = f[x_0, x_1, x_2]$$

On obtient alors par récurrence :

$$a_k = \frac{f[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} = f[x_0, \dots, x_k]$$

Concrètement, pour utiliser cette formule de récurrence, on construit le tableau suivant, qui permet de calculer les différences divisées de proche en proche :



Exercice

Déterminer le polynôme d'interpolation de Newton satisfaisant au tableau ci-dessous :

xi	0	2	4	5	8	10
yi	-1	1	6	0	2	5

Manipulations

- Entrer le vecteur x et y
- Déterminer le nombre d'élément du vecteur x où y « n »
- Créer la matrice où le tableau des différences finies D comme suit :

1. La 1^{ère} colonne de la matrice D est égale le vecteur y
2. Pour $j=2$ à n et $i=j$ à n

$$D(i, j) = \frac{D(i, j - 1) - D(i - 1, j - 1)}{x_i - x_{i-j+1}}$$

3. Extraire la diagonale de la matrice D dans un vecteur « a »
4. Interpoler la fonction $f(x)$ pour $x=7$ en utilisant la méthode de Newton :

$$\mathbf{I} = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$