TP N° 8 : Interpolation (polynôme de Newton)

Étant donné $n+1$ couples $(xi\ ,\ yi\ )$, le problème consiste à trouver une fonction $\phi(x)$ telle que $\phi\ (xi\ ) = yi$; on dit alors que ϕ interpole $\{yi\ \}$ aux nœuds $\{xi\}$. On parle d'*interpolation polynomiale* quand ϕ est un polynôme.

La méthode de Newton

Le polynôme d'interpolation de Newton de degré n relatif à la subdivision $\{(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_n,y_n)\}$ s'écrit :

$$P_n(x) = a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}).$$

Avec

$$\boldsymbol{P_n(x_i) = y_i = f(x_i)}$$

D'après cette définition on a $P_n(x_0) = a_0 = f(x_0)$,
$$P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f(x_1) \Rightarrow a_1 = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = f[x_0, x_1]$$

De la même manière

$$\boldsymbol{a_2 = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0} = f[x_0, x_1, x_2]}$$

On obtient alors par récurrence :

$$\boldsymbol{a_k = \frac{f[x_1, \ldots., x_k] - f[x_0, \ldots\ldots x_{k-1}]}{x_k - x_0} = f[x_0, \ldots\ldots, x_k]}$$

Concrètement, pour utiliser cette formule de récurrence, on construit le tableau suivant, qui permet de calculer les différences divisées de proche en proche :

$$\begin{array}{ccccccc}
f[x_0] & & & & & & \\
& \searrow & & & & & \\
f[x_1] & \rightarrow & f[x_0, x_1] & & & & \\
& \searrow & & \searrow & & & \\
f[x_2] & \rightarrow & f[x_1, x_2] & \rightarrow & f[x_0, x_1, x_2] & & \\
& \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
f[x_3] & \rightarrow & f[x_2, x_3] & \rightarrow & f[x_1, x_2, x_3] & \rightarrow & f[x_0, x_1, x_2, x_3]
\end{array}$$

Exercice

Déterminer le polynôme d'interpolation de Newton satisfaisant au tableau ci-dessous :

xi	0	2	4	5	8	10
yi	-1	1	6	0	2	5

Manipulations

- Entrer le vecteur x et y
- Déterminer le nombre d'élément du vecteur x où y « n »
- Créer la matrice où le tableau des différence finies D comme suit :

1. La 1ère colonne de la matrice D est égale le vecteur y
2. Pour j=2 à n et i=j à n

$$D(i,j) = \frac{D(i,j-1) - D(i-1,j-1)}{x_i - x_{i-j+1}}$$

3. Extraire la diagonale de la matrice D dans un vecteur « a »
4. Interpoler la fonction f(x) pour x=7 en utilisant la méthode de Newton :

$$\mathbf{I} = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + a_n(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})$$