RESOLUTION DES SYSTEMES LINEAIRES

Exercice 1

On pose : a=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \\ 8 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ b=$\begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ 35 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} L_1 = (2 \quad 1 \quad 2 \quad 10) \\ L_2 = (6 \quad 4 \quad 0 \quad 26) \\ L_3 = (8 \quad 5 \quad 1 \quad 35) \end{cases}$

On applique :

$$L_i = L_i - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} L_k \quad \begin{cases} k = 1{,}2 \\ i = k + 1{,}3 \end{cases}$$

k=1 $\begin{cases} L_2 = (6 \quad 4 \quad 0 \quad 26) - \frac{6}{2}(2 \quad 1 \quad 2 \quad 10) = (0 \quad 1 \quad -6 \quad -4) \\ L_3 = (8 \quad 5 \quad 1 \quad 35) - \frac{8}{2}(2 \quad 1 \quad 2 \quad 10) = (0 \quad 1 \quad -7 \quad -5) \end{cases}$

k=2 $L_3 = (0 \quad 1 \quad -7 \quad -5) - \frac{1}{1}(0 \quad 1 \quad -6 \quad -4) = (0 \quad 0 \quad -1 \quad -1)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Résolution : $\begin{cases} x_{3=}1 \\ x_{2=}2 \\ x_{1=}3 \end{cases}$

Exercice 2

On pose: a=$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ b=$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

La méthode de Gauss repose sur la formule :

$$L_i = L_i - \frac{a_{ik}}{a_{kk}} L_k \; {\scriptstyle \begin{cases} k=1,2 \\ i=k+1,3 \end{cases}}$$

k=1

Max ($|a_{11}|$, $|a_{21}|$, $|a_{31}|$)= $|a_{31}| = 3$. On permute la ligne 3 avec la ligne 1 :

a=$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ b=$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} L_1 = (\,3 \quad 6 \quad 9\,, \; 3) \\ L_2 = (2 \quad 1 \quad 2\,, \; 2) \\ L_3 = (1 \quad 6 \quad 9\,, \; 1) \end{cases}$

$$\begin{cases} L_2 = L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1 = (2 \quad 1 \quad 2\,, \; 2) - \frac{2}{3}(3 \quad 6 \quad 9\,, \; 3) = (0 \quad -3 \quad -4, \; 3) \\ L_3 = L_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} L_1 = \; (1 \quad 6 \quad 9, \; 1) - \frac{1}{3}(3 \quad 6 \quad 9\,, \; 3) = (0 \quad 4 \quad 6, \quad 0) \end{cases}$$

On obtient : a=$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & -3 & -4 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ b=$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

k=2

Max ($|a_{22}|, |a_{32}|$)= $|a_{32}| = 4$. On permute la ligne 3 avec la ligne 2 :

a=$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ b=$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} L_1 = (3 \quad 6 \quad 9\,, \; 3) \\ L_2 = (0 \quad 4 \quad 6, \;\; 0) \\ L_3 = (0 \; -3 \; -4, \;\; 0) \end{cases}$

$L_3 = L_3 - \frac{a_{32}}{a_{22}} L_2 = (0 \; -3 \; -4, \;\; 0) - \frac{-3}{4}(0 \quad 4 \quad 6, \;\; 0) = (0 \quad 0 \;\; 0.5, \;\; 0)$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Résolution : $x_1 = 1 \quad x_2 = 0 \qquad x_3 = 0$

Exercice 3

La méthode repose sur la formule : $L_i = L_i - L_k \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$, $k = 1{:}2, \quad i = k+1{:}3$

<u>$k = 1$</u>

$\max(|a_{i1}|, i = 1{:}3) = a_{31} = 4$, on permute la ligne 3 avec la ligne 1 :

$$a = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 3 & 8 & 13 \\ 2 & 9 & 18 \end{pmatrix} \; b = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$L_2 = L_2 - L_1 \frac{a_{21}}{a_{11}} = (3 \;\; 8 \;\; 13, \;\; 5) - (4 \;\; 8 \;\; 12, \;\; 4)\frac{3}{4} = (0 \quad 2 \quad 4, \quad 2)$

$L_3 = L_3 - L_1 \frac{a_{31}}{a_{11}} = (2 \;\; 9 \;\; 18, \;\; 11) - (4 \;\; 8 \;\; 12, \;\; 4)\frac{2}{4} = (0 \quad 5 \quad 12, \;\; 9)$

$$a = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 12 \end{pmatrix} \; b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$$

<u>$k = 2$</u>

$\max(|a_{i2}|, i = 2{:}3) = a_{32} = 4$, on permute la ligne 3 avec la ligne 2 :

$$a = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 0 & 5 & 12 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \; b = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$L_3 = L_3 - L_2 \frac{a_{32}}{a_{22}} = (0 \quad 2 \quad 4, \quad 2) - (0 \quad 5 \quad 12, \;\; 9)\frac{2}{5} = (0 \quad 0 \;\; -0.8, \;\; -1.6)$

$$a = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 0 & 5 & 12 \\ 0 & 0 & -0.8 \end{pmatrix} \; b = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -1.6 \end{pmatrix}$$

Résolution $x = (1 \; -3 \quad 2)$

Exercice 4

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \ b = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}$$

La méthode repose sur la formule : $L_i = L_i - L_k \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$, $k = 1{:}2, \quad i = k+1{:}3$

$\underline{k = 1}$

$\max(|a_{i1}|, i = 1{:}3) = 1$, aucune permutation

$L_2 = L_2 - L_1 \dfrac{a_{21}}{a_{11}} = (1\ \ 3\ \ 2,\ \ 11) - (1\ \ 1\ \ 1,\ \ 6) = (0\quad 2\quad 1,\quad 5)$

$L_3 = L_3 - L_1 \dfrac{a_{31}}{a_{11}} = (1\ \ 3\ \ 3,\ \ 12) - (1\ \ 1\ \ 1,\ \ 6) = (0\quad 2\quad 2,\ \ 6)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \ b = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\underline{k = 2}$

$\max(|a_{i2}|, i = 2{:}3) = 2$, aucune permutation

$L_3 = L_3 - L_2 \dfrac{a_{32}}{a_{22}} = (0\quad 2\quad 2,\quad 6) - (0\quad 2\quad 1,\ \ 5) = (0\quad 0\ \ 1,\ \ 1)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ b = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Résolution $x = (3\quad 2\quad 1)$

Exercice 6

Le trajet du cycliste est illustré par la figure 1.

Le temps de l'aller de la ville A à la ville B :

$$\frac{x_1}{15} + \frac{x_2}{20} + \frac{x_3}{30} = 2$$

Le temps du retour :

$$\frac{x_3}{15} + \frac{x_2}{20} + \frac{x_1}{30} = 3$$

En faisant la somme des deux équations puis la différence, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10} + \frac{x_3}{10} = 5 \\ \frac{x_1}{30} - \frac{x_3}{30} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 50 \\ x_1 - x_3 = -30 \end{cases}$$

La distance entre les deux villes est de 50 km.

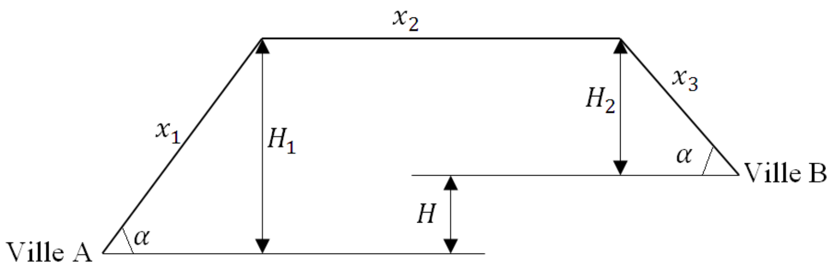

Figure 1 : Trajet du cycliste entre la ville A et la ville B

H : est la différence d'altitude :

$$H = H_1 - H_2 = x_1 sin\alpha - x_3 sin\alpha = (x_1 - x_3) sin\alpha = -30 \frac{tg\alpha}{\sqrt{1 + tg^2\alpha}} = -1.4981$$

La hauteur H est négative, ce qui signifie que la ville A est plus haute que la ville B.

Pour le second cycliste, on a :

$$\underbrace{\left(\frac{x_1}{20} + \frac{x_2}{30} + \frac{x_3}{40}\right)}_{le\ temps\ \ de\ l'aller} + \underbrace{\left(\frac{x_3}{20} + \frac{x_2}{30} + \frac{x_1}{40}\right)}_{le\ temps\ \ du\ retour} = \underbrace{3 + \frac{2}{3}}_{3h\ 40\ mn}$$

Ce qui donne $9x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 440$

D'où le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 50 \\ x_1 - x_3 = -30 \\ 9x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 440 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 10 \\ x_3 = 35 \end{cases}$$