Chapitre 2

Introduction aux opérateurs non bornés

2.1 Opérateurs bornés, non bornés, fermés

On considère deux espaces de Hilbert E et F dont les normes et produits scalaires sont notés : $\|.\|_E, (.,.)_E, \|.\|_F, (.,.)_F$.
Soit $D(A)$ un sous-espace vectoriel de E et A une application (un *opérateur*) linéaire de $D(A)$ dans F.

On dit que A est un opérateur *borné* de E dans F si $D(A) = E$ et si il existe C tel que :

$$\|Au\|_F \leq C\|u\|_E \quad \forall u \in E. \tag{2.1}$$

On pose alors :

$$\|A\| = \sup_{u\in E, u\neq 0} \frac{\|Au\|_F}{\|u\|_E}.$$

Si $D(A) \neq E$ et s'il existe une constante C telle que :

$$\|Au\|_F \leq C\|u\|_E \quad \forall u \in D(A), \tag{2.2}$$

alors l'opérateur A se prolonge en un opérateur borné de $\overline{D(A)}$ dans F, où $\overline{D(A)}$ désigne l'adhérence de $D(A)$ dans E.
En particulier, un opérateur de domaine dense $D(A)$ vérifiant (2.2) se prolonge en un opérateur borné sur E.
On désigne par $\mathcal{L}(E, F)$ (resp. $\mathcal{L}(E)$) l'ensemble des opérateurs bornés de E dans F (resp. de E dans E). C'est un espace vectoriel. Muni de la norme $\|.\|$, c'est un espace de Banach. Enfin, une caractérisation très utile de $\|A\|$ est la suivante (exercice!) :

$$\forall A \in \mathcal{L}(E, F) \;\; \|A\| = \sup_{u\in E, v\in F} \frac{(Au, v)_F}{\|u\|_E \|v\|_F}.$$

On dit que A est un opérateur *non borné* s'il n'existe pas de constante C telle que (2.2) soit satisfait. En d'autres termes, A est non borné si et seulement si il existe une suite $u_n \in D(A)$ telle que :

$$\|u_n\|_E = 1 \quad et \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \|Au_n\|_F = +\infty.$$

Remarque 2.1 *En fait, la propriété (2.1) signifie exactement que A est continu de E dans F. Autrement dit, un opérateur borné de E dans F est continu de E dans F. Nous verrons ci-dessous (cf. théorème2.1) que pour une large catégorie d'opérateurs appelés les opérateurs fermés, un opérateur tel que $D(A) = E$ est nécessairement borné. Pour cette raison, de nombreux auteurs appellent opérateur non borné tout opérateur A tel que $D(A) \neq E$.*

Exemple 2.1 :
Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $E = F = L^2(\Omega)$ et $f \in L^\infty(\Omega)$. L'opérateur A défini par :

$$Au = fu \quad \forall u \in L^2(\Omega),$$

est borné de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ puisque :

$$\|fu\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in L^2(\Omega).$$

Exemple 2.2 : On suppose $E = F = L^2(\mathbb{R})$. Alors, l'opérateur A défini par :

$$Au(x) = xu(x),$$

de domaine

$$D(A) = \{u \in L^2(\mathbb{R}) \text{ tel que } xu \in L^2(\mathbb{R})\}$$

est non borné. Il suffit pour s'en convaincre de considérer la suite u_n de $D(A)$ donnée par :

$$u_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < n \text{ ou } x > n+1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

En effet : $\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ et $\|Au_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{\dfrac{3n^2 + 3n + 1}{3}}$.

Exemple 2.3 : On suppose maintenant $E = F = L^2(0,1)$ et on considère l'opérateur A défini par :

$$D(A) = \{u \in L^2(0,1) \text{ tel que } \frac{du}{dx} \in L^2(0,1)\}$$
$$\forall u \in D(A) \quad Au = \frac{du}{dx}$$

Alors A est un opérateur non borné (On peut considérer la suite $u_n(x) = e^{inx}$). On remarque que $D(A)$ n'est rien d'autre que l'espace de Sobolev $H^1(0,1)$.

On peut ajouter un opérateur borné à un opérateur non borné. Plus précisément, si $(A, D(A))$ est non borné de E dans F et $B \in \mathcal{L}(E, F)$, alors on définit l'opérateur non borné $A + B$ de domaine $D(A + B) = D(A)$ par :

$$\forall u \in D(A) \quad (A + B)u = Au + Bu.$$

Il est clair que $A+B$ est effectivement un opérateur non borné car sinon $A = (A+B)-B$ serait borné.
Ceci sera utilisé implicitement dans la suite pour définir l'opérateur $A - \lambda I$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

On peut définir une relation d'ordre sur l'ensemble des opérateurs non bornés. On dit que $B : D(B) \subset E \to F$ prolonge $A : D(A) \subset E \to F$, ou que B est une extension de A, si et seulement si $D(A) \subset D(B)$ et $\forall u \in D(A)$ $Bu = Au$. On note alors $A \subset B$.

Définition 2.1 *Un opérateur $A : D(A) \subset E \to F$ est dit fermé si son graphe $G(A) = \{(u, Au)\ ;\ u \in D(A)\}$ est fermé dans $E \times F$.*

On a implicitement muni $E \times F$ de la norme produit :

$$\forall (u, v) \in E \times F \quad \|(u, v)\|^2_{E\times F} = \|u\|^2_E + \|v\|^2_F.$$

Autrement dit, A est fermé si, pour toute suite u_n de $D(A)$ telle que $u_n \to u$ dans E et $Au_n \to v$ dans F, on a : $u \in D(A)$ et $Au = v$.
On notera aussi que dire que A est fermé équivaut à dire que $D(A)$ muni de la norme dite "du graphe" :

$$\|u\|^2_{D(A)} = \|u\|^2_E + \|Au\|^2_F$$

est un espace de Hilbert.

Remarque 2.2 *Tout opérateur borné est fermé.*

Exemple 2.4 : L'opérateur A de l'exemple 2.3 est un opérateur fermé. En effet, si $u_n \to u$ dans $L^2(0, 1)$ et $\dfrac{du_n}{dx} \to v$ dans $L^2(0, 1)$, alors il est clair que u_n est une suite de Cauchy dans $H^1(0, 1)$ (qui est un espace complet). Par conséquent, $u \in H^1(0, 1)$ et $v = \dfrac{du}{dx}$.
Si on modifie $D(A)$, A peut très bien devenir non fermé. On peut par exemple choisir $D(A) = \mathcal{C}^1(0, 1)$. Alors la suite $u_n \in D(A)$ définie par :

$$u_n(x) = \left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

converge dans $H^1(0, 1)$ vers $u(x) = \left|x - \frac{1}{2}\right|$. Cela signifie que les suites u_n et Au_n convergent toutes deux dans E et pourtant $u \notin \mathcal{C}^1(0, 1)$. A n'est donc pas fermé. Le domaine a été choisi "trop petit".

Notons :

$$\begin{aligned} Ker\ A &= \{u \in D(A); Au = 0\} \\ Im\ A &= \{Au; u \in D(A)\} \end{aligned}$$

de sorte que $Ker\ A$ est un sous-espace vectoriel de E et $Im\ A$ un sous-espace vectoriel de F. On dit que $Ker\ A$ est le noyau de A et $Im\ A$ son image. De plus :

Lemme 2.1 *Si $A : D(A) \subset E \to F$ est un opérateur fermé, alors $Ker\ A$ est fermé.*

DÉMONSTRATION. Soit $u_n \in Ker\ A$ une suite convergeant vers u dans E. Alors la suite Au_n est convergente puisqu'elle est identiquement nulle. Comme A est fermé, on en déduit que $u \in D(A)$ et $Au = 0$.

□

Lemme 2.2 *Si $A : D(A) \subset E \to F$ est un opérateur fermé et bijectif de $D(A)$ sur F, alors A^{-1} est également fermé.*

DÉMONSTRATION. Soit $u_n \in F$ telle que $u_n \to u$ dans F et $A^{-1}u_n \to v$ dans E. Posons : $w_n = A^{-1}u_n$. Alors $w_n \to v$ dans E et $Aw_n \to u$ dans F. Comme A est fermé, il en résulte que $v \in D(A)$ et $Av = u$, soit $v = A^{-1}u$.

□

Nous allons maintenant énoncer sans le démontrer un théorème essentiel, du à Banach, et qui constitue une sorte de réciproque de la remarque 2.2 :

Théorème 2.1 (Théorème du graphe fermé) : *Soit A un opérateur de E dans F dont le domaine est égal à E et qui est un opérateur fermé, alors A est borné de E dans F.*

Autrement dit, si $A : D(A) \subset E \to F$ est un opérateur non borné et fermé, alors on a nécessairement $D(A) \neq E$.

On déduit directement du lemme 2.2 et du théorème 2.1 le

Théorème 2.2 *Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur fermé et bijectif de $D(A)$ sur F, alors A^{-1} est borné de F dans E.*

2.2 Opérateurs compacts

Nous avons vu que les opérateurs bornés de E dans F sont caractérisés par le fait que l'image de la boule unité fermée de E, notée $B_E(O, 1)$, est bornée. Si cette image est de plus d'adhérence compacte, on dit que l'opérateur est compact :

Définition 2.2 *Un opérateur A linéaire borné de E dans F est dit compact si et seulement si l'une de ces deux propositions équivalentes suivantes est satisfaite :*

1. *L'image par A de $B_E(O,1)$ est d'adhérence compacte.*
2. *De toute suite (u_n) bornée dans E, on peut extraire une sous-suite (u'_n) telle que la suite (Au'_n) converge dans F.*

Désignons par $\mathcal{K}(E;F)$ (resp. $\mathcal{K}(E)$) l'ensemble des opérateurs compacts de E dans F (resp. dans E). On démontre (cf. [8]) que $\mathcal{K}(E;F)$ est un sous-espace fermé, donc de Banach, de $\mathcal{L}(E;F)$.

Exemple 2.5 : On sait que dans un espace de dimension finie, les ensembles fermés bornés sont compacts. Il est donc clair que si l'image de A, $Im\ A$, est de dimension finie, A est compact. On dit alors que A est de **rang fini**.

On démontre (cf.[8]) le

Théorème 2.3 *Tout opérateur $A \in \mathcal{K}(E;F)$ est limite au sens de $\mathcal{L}(E;F)$ d'une suite d'opérateurs de rang fini.*

Exemple 2.6 : Soit E un espace de Hilbert séparable, (e_n) une base hibertienne de E et (λ_n) une suite de scalaires tels que $\lambda_n \longrightarrow 0$. Alors l'opérateur A défini par :

$$Ae_n = \lambda_n e_n$$

est compact. En effet, soit A_N l'opérateur de rang fini défini par :

$$\begin{array}{ll} A_N e_n = Ae_n & \text{si } n \leq N \\ A_N e_n = 0 & \text{sinon.} \end{array}$$

Alors on a, pour tout $u \in E$:

$$\|(A - A_N)\, u\|_E^2 = \sum_{n>N}^{+\infty} |\lambda_n|^2 \, |(u, e_n)_E|^2 \leq |\lambda_{N+1}|^2 \, \|u\|_E^2.$$

Donc :

$$\|A - A_N\| \leq |\lambda_{N+1}| \, .$$

Par conséquent, $A_N \longrightarrow A$ dans $\mathcal{L}(E)$.
Nous verrons au chapitre suivant que, en ce qui concerne les opérateurs autoadjoints compacts, la situation décrite par cet exemple est caractéristique.

2.3 Opérateur adjoint

Définition 2.3 *Soit $A : D(A) \subset E \rightarrow F$ un opérateur dont le domaine $D(A)$ est dense dans E. On appelle adjoint de l'opérateur A l'opérateur $A^* : D(A^*) \subset F \rightarrow E$ défini par :*

$$\begin{array}{l} D(A^*) = \{v \in F \text{ tel que } \exists w \in E;\ (v, Au)_F = (w, u)_E \quad \forall u \in D(A)\} \\ A^* v = w \end{array}$$

L'unicité de w résulte de la densité de $D(A)$ dans E. Il est clair que $D(A^*)$ est un sous-espace vectoriel de F et que A^* est un opérateur linéaire.
Par définition, on a toujours :

$$(v, Au)_E = (A^*v, u)_F \quad \forall u \in D(A), \quad \forall v \in D(A^*). \tag{2.3}$$

Remarque 2.3 *On peut aussi définir $D(A^*)$ de la façon suivante :*

$$D(A^*) = \{v \in F;\ \exists c > 0 \text{ tel que } |(v, Au)_F| \leq c\|u\|_E \ \forall u \in D(A)\}.$$

En effet, soit $v \in D(A^*)$ défini ainsi. Alors l'application de $D(A)$ dans $\mathbb{R}$ qui à u associe $(v, Au)_F$ se prolonge par densité de $D(A)$ dans E en une forme linéaire continue sur E. Par le théorème de Riesz, il existe donc $w \in E$ tel que :

$$(v, Au)_F = (w, u)_E \quad \forall u \in D(A).$$

On retrouve ainsi la première définition.

On vérifie aisément le résultat suivant :

Lemme 2.3 *Si A est borné, alors A^* est également borné et $\|A\| = \|A^*\|$.*

De plus, on a le

Lemme 2.4 *A^* est fermé.*

Démonstration. Soit v_n une suite de $D(A^*)$ telle que $v_n \to v$ dans F et $A^*v_n \to u$ dans E. Alors, on a, par définition de l'adjoint :

$$\forall w \in D(A) \quad (v_n, Aw)_F = (A^*v_n, w)_E.$$

D'où, par passage à la limite :

$$\forall w \in D(A) \quad (v, Aw)_F = (u, w)_E,$$

ce qui signifie exactement que $v \in D(A^*)$ et que $A^*v = u$.

□

On peut se demander si l'opérateur adjoint A^* a un domaine dense. La réponse est oui lorsque A est fermé :

Lemme 2.5 *Soit $A : D(A) \subset E \to F$ un opérateur fermé. Alors $D(A^*)$ est dense dans E et A^{**} est une extension de A.*

Démonstration. Soit $v \in D(A^*)^{\perp}$. Comme A est fermé, son graphe $G(A)$ est fermé dans $E \times F$ et l'on peut donc parler de la projection orthogonale P de $E \times F$ sur $G(A)$. Notons X et Y les vecteurs de $E \times F$ définis comme suit : $X = (0, v)$ et $Y = X - PX$. Le vecteur Y est de la forme $Y = (w, z)$ avec $w \in E$ et $z \in F$. Comme Y est orthogonal à $G(A)$, on a :

$$\forall u \in D(A) \quad (u, w)_E + (Au, z)_F = 0.$$

Par conséquent, $z \in D(A^*)$. Donc $(z,v)_F = 0$. Mais par ailleurs :

$$(z,v)_F = (X,Y)_{E\times F} = (Y,Y)_{E\times F}.$$

Donc $Y = 0$, ce qui signifie que $X \in G(A)$ et donc que $v = 0$. Ceci prouve que $D(A^*)$ est dense.
Considérons alors l'adjoint de A^* que nous noterons A^{**}. Montrons qu'il constitue une extension de A. Pour tout $u \in D(A)$, on a :

$$\forall v \in D(A^*) \quad (Au,v)_F = (u, A^*v)_E\,.$$

Ceci signifie exactement que $u \in D(A^{**})$ et que $A^{**}u = Au$.

□

On peut également vérifier (exercice!) que si B est une extension de A, alors A^* est une extension de B^*.
Nous alons maintenant démontrer des relations entre les noyaux et images d'un opérateur et de son adjoint.

Lemme 2.6 *Soit $A : D(A) \subset E \to F$. Alors :*

1. *$Ker\ A^* = (Im\ A)^\perp$ et $(Ker\ A^*)^\perp = \overline{Im\ A}$*
2. *Si de plus l'opérateur A est fermé : $Ker\ A = (Im\ A^*)^\perp$ et $(Ker\ A)^\perp = \overline{Im\ A^*}$.*

DÉMONSTRATION.
– La première égalité est une conséquence immédiate de la définition de l'adjoint et de (2.3) et la seconde résulte du fait que pour tout sous-espace vectoriel M d'un espace de Hilbert, $\left(M^\perp\right)^\perp = \bar{M}$.
– Ce point est plus délicat. L'inclusion $Ker\ A \subset (Im\ A^*)^\perp$, et par suite, en passant aux orthogonaux, $\overline{Im\ A^*} \subset (Ker\ A)^\perp$, est toujours vraie. Pour démontrer l'inclusion inverse, la difficulté consiste à prouver que $(Im\ A^*)^\perp \subset D(A)$.
Soit $u \in (Im\ A^*)^\perp$. Montrer que $u \in Ker\ A$ équivaut à montrer que $(u,0) \in G(A)$. Comme A est fermé, ceci revient à montrer que $(u,0) \in (G(A)^\perp)^\perp$. Autrement dit, il faut montrer que pour tout $(x,y) \in G(A)^\perp$, $(u,x)_E = 0$. Or $(x,y) \in G(A)^\perp$ signifie que pour tout $v \in D(A)$, $(x,v)_E + (y,Av)_F = 0$. Ceci implique que $y \in D(A^*)$ et que $x = -A^*y$. Donc on a bien $(u,x)_E = 0$ puisque $u \in (Im\ A^*)^\perp$.

□

Exemple 2.7 : Soit A l'opérateur non borné de $L^2(\mathbb{R})$ défini par :

$$\begin{array}{l} D(A) = H^1(\mathbb{R}) \\ \forall u \in D(A) \quad Au = \frac{du}{dx} + u \end{array}$$

Alors $v \in D(A^*)$ s'il existe $w \in L^2(\mathbb{R})$ tel que :

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{du}{dx} + u\right) v\,dx = \int_{\mathbb{R}} wu\,dx \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}).$$

Ceci signifie exactement que $v \in H^1(\mathbb{R})$ et que $\dfrac{dv}{dx} = v - w$. On a donc finalement : $D(A^*) = H^1(\mathbb{R})$ et $A^* v = -\dfrac{dv}{dx} + v$.

Exemple 2.8 : Soit A l'opérateur non borné de $L^2(0,1)$ défini par :

$$
\begin{aligned}
&D(A) = \big\{u \in H^2(0,1);\ u(0) = u'(0) = 0\big\}\\
&\forall u \in D(A) \quad Au = -\frac{d^2u}{dx^2} + u
\end{aligned}
$$

On peut vérifier que son adjoint A^* est défini par :

$$
\begin{aligned}
&D(A^*) = \big\{u \in H^2(0,1);\ u(1) = u'(1) = 0\big\}\\
&\forall u \in D(A^*) \quad A^*u = -\frac{d^2u}{dx^2} + u
\end{aligned}
$$

et que $A^{**} = A$.

2.4 Opérateurs autoadjoints

C'est à cette catégorie d'opérateurs définis ci-dessous que nous nous intéresserons pendant la suite de ce cours.
A partir de maintenant, nous supposerons $E = F$.
On dit qu'un opérateur $A : D(A) \subset E \to E$ est symétrique si :

$$
(Au, v)_E = (u, Av)_E \quad \forall u, v \in D(A). \tag{2.4}
$$

Soit A un opérateur de domaine dense et A^* son adjoint. Il est alors facile de vérifier que :
– Si A est symétrique, $A \subset A^*$.
– Si A est symétrique et borné, $A = A^*$.

Définition 2.4 *Un opérateur $A : D(A) \subset E \to E$ de domaine dense est dit autoadjoint si $A^* = A$.*

Remarque 2.4 *L'égalité $A = A^*$ signifie que l'on a à la fois $D(A) = D(A^*)$ et $Au = A^*u$ pour tout $u \in D(A)$. D'après l'identité (2.3), un opérateur autoadjoint vérifie toujours (2.4). Autrement dit, un opérateur autoadjoint est nécessairement symétrique mais la réciproque est fausse. Un opérateur symétrique n'est pas nécessairement autoadjoint et l'on peut avoir :*

$$
D(A) \subset D(A^*) \quad \text{avec} \quad D(A) \neq D(A^*).
$$

Cependant, dans le cas particulier des opérateurs bornés, "symétrique" équivaut à "autoadjoint".

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer les propriétés suivantes qui sont élémentaires :
Si $A : D(A) \subset E \to E$ et $B \in \mathcal{L}(E)$ sont autoadjoints, alors $A + B : D(A) \subset E \to E$ est autoadjoint. En particulier, pour tout λ réel, $A - \lambda I$ est autoadjoint.
Si $A : D(A) \subset E \to E$ est autoadjoint et bijectif, alors A^{-1} est un opérateur autoadjoint borné de E.
Finalement, si $A : D(A) \subset E \to E$ est un opérateur autoadjoint et si $A - \lambda I$ est bijectif pour un réel λ, alors $(A - \lambda I)^{-1}$ est un opérateur autoadjoint borné.

Nous allons maintenant établir une caractérisation très utile de la norme des opérateurs autoadjoints bornés :

Théorème 2.4 *Si $A \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint, alors :*

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|(Ax, x)_E|}{\|x\|_E^2} = \sup_{\|x\|_E = 1} |(Ax, x)_E|$$

Démonstration. L'inégalité $\sup_{\|x\|_E=1}(Ax, x)_E \leq \|A\|$ est évidente. Pour établir l'inégalité inverse, nous allons utiliser le fait que :

$$\|A\| = \sup_{\|x\|_E = \|y\|_E = 1} (Ax, y)_E. \tag{2.5}$$

Soient x et y tels que $\|x\|_E = \|y\|_E = 1$. Si $(Ax, y) \in \mathbb{R}$, on a l'identité de polarisation suivante :

$$(Ax, y)_E = \frac{1}{4} \left\{ (A(x + y), (x + y))_E - (A(x - y), (x - y))_E \right\}.$$

Par conséquent :

$$|(Ax, y)_E| \leq \frac{M}{4} \left\{ \|x + y\|_E^2 + \|x - y\|_E^2 \right\} \leq \frac{M}{2} \left(\|x\|_E^2 + \|y\|_E^2 \right) = M$$

où l'on a posé

$$M = \sup_{\|x\|_E = 1} (Ax, x)_E.$$

Si $(Ax, y)_E = \lambda \notin \mathbb{R}$, alors $\left(A \left(\frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|} x \right), y \right)_E \in \mathbb{R}$ et d'après ce qui précède, l'inégalité :

$$|(Ax, y)_E| \leq M \tag{2.6}$$

reste vraie. Le résultat cherché se déduit finalement de (2.5) et (2.6).

□

Remarque 2.5 *Bien entendu, ce résultat est faux si A n'est pas autoadjoint. Ainsi par exemple, si A est antisymétrique, $(Ax, x)_E = 0$ pour tout $x \in E$.*

Une conséquence immédiate de ce résultat est le

Corollaire 2.1 *Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ un opérateur symétrique de domaine dense vérifiant :*

$$|(Ax, x)_E| \leq C, \quad \forall x \in E.$$

Alors A se prolonge en un opérateur borné vérifiant :

$$\|A\| \leq C.$$

En particulier, si $(Ax, x)_E = 0$ pour tout $x \in D(A)$, alors $A = 0$.

Des lemmes 2.2 et 2.3, on déduit immédiatement le

Lemme 2.7 *Soit $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur autoadjoint. Alors A est fermé et l'on a :*

$$Ker\ A = (Im\ A)^{\perp}$$
$$\overline{Im\ A} = (Ker\ A)^{\perp}$$

On a donc la décomposition orthogonale suivante :

$$E = Ker\ A \bigoplus \overline{Im\ A}\,.$$

On a aussi le

Lemme 2.8 *Soit $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur autoadjoint et X un sous espace de $D(A)$ stable par A i.e. $AX \subset X$. Alors l'image par A de $X^{\perp} \cap D(A)$ est contenue dans $X^{\perp}$.*

Démonstration. Soit $u \in X^{\perp} \cap D(A)$ et $v \in X$. Alors : $(Au, v)_E = (u, Av)_E = 0$ car $Av \in X$. Ceci étant vrai pour tout $v \in X$, on en déduit que $Au \in X^{\perp}$.

□

Exemple 2.9 :
1° L'opérateur borné défini dans l'exemple 2.1 est clairement symétrique et donc autoadjoint.
2° Considérons l'opérateur non borné $A : D(A) \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ suivant : $D(A) = \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $\forall u \in D(A), \quad Au(x) = xu(x)$. Il est clairement symétrique puisque :

$$\forall u, v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \qquad \int_{\mathbb{R}} (xu(x))v(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} u(x)(xv(x))\,dx.$$

En revanche, on vérifie aisément que $D(A^*) = \{v \in L^2(\mathbb{R}); xv(x) \in L^2(\mathbb{R})\}$. Autrement dit $D(A)$ est strictement inclus dans $D(A^*)$ et A n'est donc pas autoadjoint. La raison en est que l'on a choisi un domaine "trop petit" pour A. En effet, l'opérateur défini dans l'exemple 2.2 est quant à lui parfaitement autoadjoint.

Exemple 2.10 : Considérons maintenant l'opérateur non borné de $L^2(\mathbb{R}^n)$ défini ainsi :

$$D(A) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n); \Delta u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$
$$\forall u \in D(A) \quad Au = -\Delta u$$

On vérifie aisément (en utilisant la transformée de Fourier) que $D(A) = H^2(\mathbb{R}^n)$ et l'on a la formule de Green classique :

$$\forall u, v \in H^2(\mathbb{R}^n) \quad \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta u) v \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} u(-\Delta v) \, dx$$

L'opérateur A est donc symétrique et de domaine dense (puisque $H^2(\mathbb{R}^n)$ contient $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ qui est dense dans $L^2(\mathbb{R}^n)$). Montrons qu'il est autoadjoint : soit $v \in D(A^*)$. Alors il existe $w \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tel que :

$$\forall u \in H^2(\mathbb{R}^n) \quad \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta u) v \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} uw \, dx.$$

Ceci entraine que $-\Delta v = w$ et donc que $v \in D(A)$.

Pour démontrer sans peine qu'un opérateur symétrique est autoadjoint, nous aurons souvent recours à la caractérisation suivante :

Théorème 2.5 *Soit $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur symétrique tel que $Im(A+I) = E$. Alors le domaine de A est dense dans E et A est autoadjoint.*

Démonstration. 1° Montrons tout d'abord que $D(A)$ est dense dans E. Cela équivaut à prouver que $D(A)^{\perp} = \{0\}$. Soit donc $w \in D(A)^{\perp}$. Par hypothèse, il existe $z \in D(A)$ tel que $Az + z = w$. On a alors :

$$(w, u)_E = (Az + z, u)_E = (z, Au + u)_E = 0 \quad \forall u \in D(A).$$

Il en résulte que $z \in (Im(A+I))^{\perp}$ donc $z = w = 0$.
2° Pour montrer que A est autoadjoint, il suffit de prouver l'inclusion suivante : $D(A^*) \subset D(A)$. Soit donc $v \in D(A^*)$. Par hypothèse, il existe $z \in D(A)$ tel que : $Az + z = A^*v + v$. On a alors :

$$\forall u \in D(A) \quad (v, Au + u)_E = (A^*v + v, u)_E = (Az + z, u)_E = (z, Au + u)_E.$$

Il en résulte que $v = z$ et donc $v \in D(A)$.

□

Exemple 2.11 : Soit Ω un domaine régulier de $\mathbb{R}^n$. Considérons l'opérateur non borné de $L^2(\Omega)$ défini par :

$$D(A) = \{u \in H^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}$$
$$Au = -\Delta u \quad \forall u \in D(A).$$

Autrement dit, on s'intéresse à l'opérateur Laplacien (on a l'habitude de considérer l'opposé du Laplacien afin d'obtenir un opérateur "positif") muni de conditions aux limites de type *Neumann homogène*. Cet opérateur est symétrique d'après la formule de Green classique :

$$\forall u, v \in D(A) \quad \int_{\Omega} (-\Delta u) v \, dx = \int_{\Omega} u(-\Delta v) \, dx.$$

Il est également autoadjoint. En effet, nous allons montrer que $A + I$ est inversible et l'on pourra donc appliquer le théorème 2.5. Soit $f \in L^2(\Omega)$. D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un unique $u \in H^1(\Omega)$ tel que :

$$\int_\Omega (\nabla u.\nabla v + uv)\, dx = \int_\Omega fv\, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

D'après les théorèmes de régularité classiques, on a de plus $u \in D(A)$, d'où le résultat.
De même, on peut montrer que l'opérateur Laplacien muni de conditions aux limites de type Dirichlet homogène est autoadjoint. Le domaine de l'opérateur est dans ce cas $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.
En revanche, si l'on pose :

$$D(A) = \{u \in H^2(\Omega);\ \frac{\partial u}{\partial n} = u = 0 \ sur\ \partial\Omega\},$$

alors on vérifie aisément que $D(A^*) = H^2(\Omega)$. Par conséquent A est symétrique mais non autoadjoint et son adjoint A^* n'est pas symétrique ! Cette situation déplaisante résulte du fait que l'on a voulu prendre en compte "trop" de conditions aux limites.

Un opérateur autoadjoint $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ est maximal symétrique au sens où, si $B : D(B) \subset E \longrightarrow E$ est un opérateur symétrique qui prolonge A ($A \subset B$) alors nécesssairement $B = A$. En effet, on a alors $B \subset B^*$ car B est symétrique et $B^* \subset A^* = A$. D'où :

$$A \subset B \subset B^* \subset A.$$

La réciproque est fausse : il existe des opérateurs maximaux symétriques non autoadjoints.

2.5 Formes hermitiennes et opérateurs autoadjoints

Les problèmes auxquels nous nous intéresserons dans la suite de ce cours seront souvent posés sous forme variationnelle. Il nous faut donc préciser le lien qui existe entre les opérateurs et les formes sesquilinéaires.
Soit E un espace de Hilbert et $D(a)$ un sous-espace de E dense dans E. Soit alors a une forme sesquilinéaire définie sur $D(a)$. Autrement dit : pour tout $v \in D(a)$, $u \mapsto a(u, v)$ est une forme linéaire sur $D(a)$. et pour tout $u \in D(a)$, $v \mapsto a(u, v)$ est une forme antilinéaire sur $D(a)$. Alors on pose la

Définition 2.5 *On appelle opérateur A associé à la forme a l'opérateur de E défini par :*

$$u \in D(A) \Longleftrightarrow u \in D(a) \text{ et } \exists w \in E \text{ tel que } a(u, v) = (w, v)_E \quad \forall v \in D(a)$$
$$Au = w$$

Exemple 2.12 : Soit Ω un domaine régulier de $\mathbb{R}^n$ et posons $E = L^2(\Omega)$, $D(a) = H^1(\Omega)$ et $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v\,dx$, pour tous $u,v \in D(a)$. Alors on vérifie aisément (en reprenant les arguments de l'exemple 2.11) que l'opérateur A associé à a est l'opérateur de Neumann introduit dans l'exemple 2.11.

Il est clair que A est symétrique dès que a est hermitienne (i.e. $a(u,v) = \overline{a(v,u)}$). C'est le cas dans l'exemple précédent.
Nous allons maintenant donner une condition suffisante portant sur a pour que A soit autoadjoint.

Théorème 2.6 *Soit a une forme hermitienne de domaine $D(a)$ dense dans E. On suppose qu'il existe C tel que :*

$$a(u,u) + C\|u\|_E^2 \geq 0, \quad \forall u \in D(a), \tag{2.7}$$

et que $D(a)$ muni de la norme $\|u\|_{D(a)} = \sqrt{a(u,u) + C\|u\|_E^2}$ est un espace de Hilbert. Alors A est un opérateur de domaine dense dans E et est autoadjoint.

Démonstration. D'après le théorème 2.5, il suffit de montrer que $A + \lambda I$ est inversible pour $\lambda > C$. Or ceci est une conséquence immédiate du théorème de Lax-Milgram appliqué à la forme bilinéaire $a(u,v) + \lambda(u,v)_E$ sur $D(a)$.

□

2.6 Spectre d'un opérateur - Définitions

Soit $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur fermé de domaine dense. On a les définitions suivantes :

Définition 2.6 *On pose :*

$$\begin{aligned} \rho(A) &= \{\lambda \in \mathbb{C}; A - \lambda I \quad \textit{est inversible (d'inverse borné)}\} \\ \sigma(A) &= \mathbb{C} \backslash \rho(A) \end{aligned}$$

On dit que $\rho(A)$ est l'ensemble résolvant et $\sigma(A)$ le spectre de A. Pour $\lambda \in \rho(A)$, on pose $R(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$. La famille des opérateurs $R(\lambda)$ est appelée la résolvante de A.

Lemme 2.9 *$\rho(A)$ est ouvert et $\sigma(A)$ est fermé. De plus, si λ et ξ appartiennent à $\rho(A)$, on a :*

$$R(\lambda) - R(\xi) = (\lambda - \xi)R(\lambda)R(\xi) \tag{2.8}$$

Cette identité est appelée l'identité résolvante.

DÉMONSTRATION. Soit $\lambda \in \rho(A)$. Alors, on a :

$$A - \xi I = (A - \lambda I)(I + (\lambda - \xi)R(\lambda))$$

Par conséquent, $A - \xi I$ est inversible dès que $\mid \lambda - \xi \mid < \frac{1}{\|R(\lambda)\|}$. Soient λ et ξ appartenant à $\rho(A)$. Alors l'identité résolvante se déduit de l'égalité :

$$R(\xi) = (I + (\lambda - \xi)R(\lambda))^{-1}R(\lambda).$$

□

D'après le théorème 2.2, λ appartient à l'ensemble résolvant dès que $A - \lambda I$ est bijectif. En effet, l'opérateur $(A - \lambda I)^{-1}$ est alors automatiquement borné. Autrement dit :

$$\lambda \in \rho(A) \Rightarrow \exists C > 0;\ \|u\|_E \leq C\|Au - \lambda u\|_E, \quad \forall u \in D(A). \tag{2.9}$$

La contraposée de cette implication s'écrit :

$$\text{Si } \exists u_n \in D(A) \text{ t.q. } \|u_n\|_E = 1 \text{ et } \|Au_n - \lambda u_n\|_E \longrightarrow 0 \ \text{ alors } \ \lambda \in \sigma(A). \tag{2.10}$$

Les implications réciproques de (2.9) et de (2.10) ne sont pas vraies en général. En revanche, elles le deviennent, nous le verrons, pour les opérateurs autoadjoints.

Si λ appartient au spectre de A, alors :

– Soit $A - \lambda I$ n'est pas injectif. Cela signifie que

$$\exists u \in D(A), u \neq 0 \qquad Au = \lambda u.$$

  On dit alors que λ est une *valeur propre* de A. On appelle *sous-espace propre* associé à λ l'espace $E(\lambda)$ donné par :

$$E(\lambda) = \{u \in D(A); Au = \lambda u\}.$$

  La dimension de $E(\lambda)$ est appelée la *multiplicité* de λ. Enfin, l'ensemble des valeurs propres de A est noté $\sigma_p(A)$ et est appelé le *spectre ponctuel* de A.

– Soit $A - \lambda I$ est injectif mais non surjectif (ceci n'est possible que si dim $E = +\infty$). On distingue dans ce cas le spectre continu $\sigma_c(A)$ et le spectre résiduel $\sigma_r(A)$. On dit que $\lambda \in \sigma_c(A)$ si $Im(A - \lambda I)$ est dense dans E et $\lambda \in \sigma_r(A)$ sinon.
  Notons que λ est dans le spectre résiduel de A si et seulement si il existe $v \in E$, $v \neq 0$, tel que :

$$\forall u \in D(A) \quad ((A - \lambda I)u, v)_E = 0$$

  ce qui équivaut à dire que $Ker\left(A^* - \bar{\lambda} I\right) \neq 0$. En d'autres termes, on a :

$$\forall \lambda \notin \sigma_p(A) \quad \lambda \in \sigma_r(A) \Longleftrightarrow \bar{\lambda} \in \sigma_p\left(A^*\right).$$

Exemple 2.13 : Considérons l'opérateur $A : D(A) \subset L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ donné par :

$$D(A) = \{u \in L^2(\mathbb{R}); xu(x) \in L^2(\mathbb{R})\} \text{ et } Au(x) = xu(x).$$

Cet opérateur n'a pas de valeur propre.
En effet, soient $u \in D(A)$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $xu(x) = \lambda u(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors u est identiquement nul.

Cherchons maintenant pour quelles valeurs de λ l'opérateur $A - \lambda I$ est surjectif.
Soit $f \in L^2(\mathbb{R})$.
Si $\lambda \notin \mathbb{R}$, l'équation $(x-\lambda)u(x) = f(x)$ admet une solution unique u donnée par $u(x) = \frac{f(x)}{x-\lambda}$.
En revanche, si $\lambda \in \mathbb{R}$, cette équation n'admet pas de solution pour tout f. En effet si par exemple f est continue en λ alors la fonction $\frac{f(x)}{x-\lambda}$ est équivalente au voisinage de λ à $\frac{f(\lambda)}{x-\lambda}$ et n'est donc pas de carré intégrable.

En conclusion, on a :

$$\rho(A) = \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}, \quad \sigma(A) = \mathbb{R}, \quad \sigma_p(A) = \emptyset.$$

On vérifie aisément que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $Im(A - \lambda I)$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$. Par conséquent, le spectre de A est purement continu : $\sigma_c(A) = \mathbb{R}$.

Plus généralement, si $q(x)$ est une fonction continue, on vérifie que l'opérateur de multiplication A de domaine

$$D(A) = \left\{u \in L^2\left(\mathbb{R}^n\right);\ qu \in L^2\left(\mathbb{R}^n\right)\right\}$$

défini par $Au = qu$ a pour spectre :

$$\sigma(A) = \{q(x); x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Dans le cas des opérateurs bornés, on a le

Lemme 2.10 *Soit A un opérateur borné de E. Alors :*

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; \mid \lambda \mid \leq \|A\|\}$$

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\mid \lambda \mid > \|A\|$. Alors $A - \lambda I$ est inversible et :

$$(A - \lambda I)^{-1} = \frac{-1}{\lambda}\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = \frac{-1}{\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{A}{\lambda}\right)^n$$

(car la série est normalement convergente).

□

Exemple 2.14 : Considérons dans $E = \ell^2(\mathbb{N})$ l'opérateur borné A défini par :

$$\forall u = (u_n) \in \ell^2(\mathbb{N}) \quad \begin{cases} (Au)_n = u_{n-1} & \text{si } n \geq 1 \\ (Au)_0 = 0 \end{cases}$$

Par ailleurs, soit B l'opérateur borné de $\ell^2(\mathbb{N})$ défini par :

$$\forall u = (u_n) \in \ell^2(\mathbb{N}) \quad (Bu)_n = u_{n+1}.$$

Alors, comme :

$$(Au, v)_E = \sum_{n\geq 1} u_{n-1}v_n = \sum_{n\geq 0} u_n v_{n+1} = (u, Bv)_E$$

B est l'adjoint de A.
D'après le lemme précédent, comme $\|A\| = \|B\| = 1$, $\sigma(A)$ et $\sigma(B)$ sont inclus dans le disque unité de $\mathbb{C}$.
On vérifie facilement par récurrence sur n que A n'admet pas de valeur propre.
En revanche le spectre ponctuel de B est :

$$\sigma_p(B) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| < 1\}.$$

En effet, le vecteur $u = (u_n)$ avec $u_n = \lambda^n$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.
Il en résulte que :

$$\sigma_r(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| < 1\}.$$

De plus, les spectres étant fermés, on a :

$$\sigma(A) = \sigma(B) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \leq 1\}.$$

Les spectres de A et de B coïncident mais leurs structures sont très différentes puisque :

$$\begin{cases} \sigma_r(A) = \sigma_p(B) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| < 1\}, \\ \sigma_c(A) = \sigma_c(B) = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\}. \end{cases}$$

Remarque 2.6 *Soit U un opérateur unitaire de E dans F. Autrement dit, on a :*

$$UU^* = I_F \quad \text{et} \quad U^*U = I_E.$$

Soit $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur non borné de E. Alors, on peut définir l'opérateur $\hat{A} : D(\hat{A}) \subset F \to F$ de la façon suivante :

$$D(\hat{A}) = U(D(A)) \quad \text{et} \quad \hat{A}u = UAU^*u.$$

On dit que A et $\hat{A}$ sont unitairement équivalents. *De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :*

$$\hat{A} - \lambda I_F = UAU^* - \lambda I_F = U(A - \lambda I_E)U^*.$$

On en déduit que $\sigma(A) = \sigma(\hat{A})$. Mieux encore, on a : $\sigma_p(A) = \sigma_p(\hat{A})$, $\sigma_c(A) = \sigma_c(\hat{A})$ et $\sigma_r(A) = \sigma_r(\hat{A})$.
Nous utiliserons souvent cette remarque lorsque $E = F = L^2(\mathbb{R}^n)$ et U est la transformée de Fourier.

Chapitre 3

Théorie spectrale des opérateurs autoadjoints

Dans ce chapitre, nous allons donner une description précise du spectre dans le cas d'un opérateur autoadjoint. En particulier, nous introduisons les notions de spectre essentiel et spectre discret. Enfin, nous démontrons le Principe du Min-Max qui permet d'étudier les valeurs propres situées en dessous du spectre essentiel.

3.1 Caractérisation du spectre

En ce qui concerne les valeurs propres, les résultats bien connus dans le cas des matrices se généralisent aisément. Ainsi, soit $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur autoadjoint. Supposons que $u \in D(A),\ u \neq 0$ et $Au = \lambda u$. Autrement dit, λ est une valeur propre de A et u un vecteur propre associé. Alors :

$$(Au, u)_E = \lambda \|u\|_E^2 \ \text{ et } \ (Au, u)_E = (u, Au)_E = \overline{(Au, u)_E}$$

Il en résulte que nécessairement $\lambda \in \mathbb{R}$. Nous allons voir que non seulement les valeurs propres mais tout le spectre de A est réel.
Si de plus, on a $v \in D(A),\ v \neq 0$ et $Av = \mu v$ avec $\lambda \neq \mu$, alors :

$$(Au, v)_E = \lambda(u, v)_E = (u, Av)_E = \mu(u, v)_E$$

d'où $(u, v)_E = (Au, v)_E = 0$. Autrement dit, deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont nécessairement orthogonaux.
De nombreux résultats reposent sur le lemme suivant :

Lemme 3.1 *Soit $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur fermé et soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $C \in \mathbb{R}$ tels que :*

$$\|u\|_E \leq C \|Au - \lambda u\|_E \quad \forall u \in D(A). \tag{3.1}$$

Alors :

$$Ker(A - \lambda I) = \{0\} \tag{3.2}$$

et

$$Im(A - \lambda I) \text{ } est \text{ } fermé. \tag{3.3}$$

Si de plus, A est autoadjoint, alors :

$$Im(A - \bar{\lambda} I) \text{ } est \text{ } dense \text{ } dans \text{ } E. \tag{3.4}$$

Démonstration. (3.2) est une conséquence triviale de (3.1) et (3.4) est une conséquence de (3.2) et du lemme 2.6. Démontrons enfin (3.3). Soit v_n une suite de $Im(A - \lambda I)$ telle que $v_n \to v$ dans E. Comme $v_n \in Im(A - \lambda I)$, il existe $u_n \in D(A)$ tel que $Au_n - \lambda u_n = v_n$. D'après (3.1), u_n est une suite de Cauchy dans E et converge donc dans E vers un élément u. Mais comme A est fermé, on a finalement $u \in D(A)$ et $Au - \lambda u = v$.

□

On déduit de ce lemme le

Théorème 3.1 *Soit $A : D(A) \subset E \to E$ un operateur autoadjoint. Alors $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit $\lambda \notin \mathbb{R}$. Alors :

$$\forall u \in D(A) \quad |(Au - \lambda u, u)_E|^2 = |(Au, u)_E - Re\,\lambda \|u\|_E|^2 + (Im\,\lambda)^2 \|u\|_E^4,$$

d'où :

$$\forall u \in D(A) \quad \|u\|_E \leq \frac{1}{|Im\,\lambda|} \|Au - \lambda u\|_E.$$

De même, on a :

$$\forall u \in D(A) \quad \|u\|_E \leq \frac{1}{|Im\,\lambda|} \left\|Au - \bar{\lambda} u\right\|_E.$$

On déduit alors aisément du lemme 3.1 que $A - \lambda I$ est injectif et surjectif, car son image est dense et fermée.

□

Corollaire 3.1 *Soit $A : D(A) \subset E \to E$ un operateur autoadjoint. Alors $\sigma_r(A) = \emptyset$.*

Démonstration. Soit $\lambda \in \sigma(A)$. Alors λ est réel d'après le théorème précédent. Par conséquent :

$$\overline{Im\ (A - \lambda I)} = (Ker\ (A - \lambda I))^{\perp}.$$

Autrement dit, si λ n'est pas une valeur propre, alors l'image de $A - \lambda I$ est nécessairement dense dans E.

□

On déduit du lemme 3.1 et du théorème 3.1 le théorème suivant :

Théorème 3.2 *Soit $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur autoadjoint. Alors le spectre de A admet la caractérisation suivante :*

$\lambda \in \sigma(A) \Longleftrightarrow$ Il existe une suite $u_n \in D(A)$ telle que $\|u_n\|_E = 1$ et $\|Au_n - \lambda u_n\|_E \to 0$.

DÉMONSTRATION. S'il existe une telle suite, alors on ne peut pas avoir une inégalité du type (3.1) et donc nécessairement $\lambda \in \sigma(A)$. Réciproquement, si $\lambda \in \sigma(A)$, alors $\lambda \in \mathbb{R}$ et si l'inégalité (3.1) était vérifiée, le lemme 3.1 fournirait une contradiction.

□

Corollaire 3.2 *Notons $\Theta(A)$ l'image numérique de A définie par :*

$$\Theta(A) = \{(Au, u)_E ; u \in D(A), \|u\|_E = 1\} .$$

Alors : $\sigma(A) \subset \overline{\Theta(A)}$.

DÉMONSTRATION. Soit $\lambda \in \sigma(\mathrm{A})$ et u_n une suite associée. Alors on a :

$$\lim_{n \to +\infty} (Au_n, u_n)_E = \lambda$$

donc $\lambda \in \overline{\Theta(A)}$.

□

On dit qu'un opérateur non borné $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ est
– borné inférieurement s'il existe une constante C telle que :

$$\forall u \in D(A) \quad (Au, u)_E \geq C\|u\|_E^2.$$

On a alors :

$$\sigma(A) \subset \bar{\Theta}(A) \subset [C, +\infty[.$$

– borné supérieurement si $-A$ est borné inférieurement.

Il nous reste à établir quelques liens entre $\Theta(A)$ et $\sigma(A)$. Pour cela, nous allons tout d'abord établir le résultat suivant, qui exprime le fait que la norme d'un opérateur autoadjoint borné est égale à son rayon spectral :

Lemme 3.2 *Soit $A : E \to E$ un opérateur autoadjoint et borné. Alors $\sigma(A) \neq \emptyset$ et*

$$\|A\| = \sup\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(A)\}.$$

DÉMONSTRATION. Notons

$$R = \sup\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(A)\}.$$

L'inégalité $R \leq \|A\|$ résulte du corollaire 3.2. En effet, il est clair que :

$$\Theta(A) \subset [-\|A\|, +\|A\|].$$

Réciproquement, d'après le théorème 2.4, il existe une suite $u_n \in E$ telle que $\|u_n\|_E = 1$ et $|(Au_n, u_n)_E| \longrightarrow \|A\|$. Supposons par exemple que $(Au_n, u_n)_E \longrightarrow \|A\|$. On a :

$$\|Au_n - \|A\|u_n\|_E^2 = \|Au_n\|_E^2 + \|A\|^2 - 2\|A\| \, (Au_n, u_n)_E \, .$$

Par conséquent :

$$\|Au_n - \|A\|u_n\|_E^2 \leq 2\|A\| \left(\|A\| - (Au_n, u_n)_E\right),$$

ce qui prouve que $\|Au_n - \|A\|u_n\|_E$ tend vers 0. D'après le théorème 3.2, $\|A\|$ appartient donc au spectre de A. De même si $(Au_n, u_n)_E \longrightarrow -\|A\|$, on montre que $-\|A\| \in \sigma(A)$.

□

Démontrons tout d'abord le

Lemme 3.3 *Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ un opérateur non borné. Alors, si $\lambda \in \rho(A)$:*

$$\xi \in \sigma\left((A - \lambda I)^{-1}\right) \Longleftrightarrow \lambda + \frac{1}{\xi} \in \sigma(A).$$

Démonstration. En effet, on vérifie aisément que :

$$(A - \lambda I)^{-1} - \xi I = -\xi(A - \lambda I)^{-1}(A - (\frac{1}{\xi} + \lambda)I).$$

□

Corollaire 3.3 *Le spectre d'un opérateur autoadjoint est non vide.*

Démonstration. Si $\sigma(A) \neq \mathbb{R}$ alors il existe $\lambda \in \mathbb{R} \cap \rho(A)$. L'opérateur $(A - \lambda I)^{-1}$ est autoadjoint borné donc son spectre est non vide. Le résultat s'en déduit d'après le lemme 3.3.

□

On utilisera également dans la suite le

Corollaire 3.4 *Soit $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur autoadjoint et soit $\lambda \in \rho(A) \cap \mathbb{R}$. Alors :*

$$\left\|(A - \lambda I)^{-1}\right\| = \frac{1}{dist(\lambda, \sigma(A))}.$$

Démonstration. L'opérateur $(A - \lambda I)^{-1}$ est borné et autoadjoint. D'après le lemme 3.2, on a donc :

$$\left\|(A - \lambda I)^{-1}\right\| = \sup\{\mid \xi \mid;\ \xi \in \sigma\left((A - \lambda I)^{-1}\right)\}.$$

Le résultat s'en déduit d'après le lemme 3.3.

□

Nous sommes maintenant en mesure d'établir le :

Lemme 3.4 *Soit $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur autoadjoint. Alors :*

$$\inf \sigma(A) = \inf \Theta(A) = \inf_{u \in E, u \neq 0} \frac{(Au, u)_E}{\|u\|_E^2}$$

$$\sup \sigma(A) = \sup \Theta(A) = \sup_{u \in E, u \neq 0} \frac{(Au, u)_E}{\|u\|_E^2}$$

DÉMONSTRATION. D'après le théorème 3.2, il est clair que :

$$\inf \sigma(A) \geq \inf \Theta(A)$$
$$\sup \sigma(A) \leq \sup \Theta(A)$$

Supposons que $\alpha = Inf\ \sigma(A) > -\infty$. Alors, pour tout β >0, (α-β)$\in$ ρ(A) et d'après le corollaire 3.4 :

$$\left\|(A-(\alpha-\beta)I)^{-1}\right\| = \frac{1}{\beta}.$$

Par conséquent, pour tout $u \in D(A)$:

$$\|u\|_E \leq \frac{1}{\beta}\|Au-(\alpha-\beta)u\|_E$$

d'où :

$$\beta^2\|u\|_E^2 \leq \|Au\|_E^2 - 2(\alpha-\beta)(Au,u)_E + (\alpha-\beta)^2\|u\|_E^2.$$

En faisant tendre β vers $+\infty$, on voit que nécessairement :

$$(Au,u)_E \geq \alpha\|u\|_E^2 \quad \forall u \in D(A)$$

d'où la première égalité ; on démontre de même la seconde.

□

3.2 Spectre essentiel et spectre discret

Nous allons maintenant introduire une notion nouvelle, celle de *spectre essentiel.* Nous n'en donnons pas la définition la plus générale car nous ne considèrerons dans la suite que le spectre essentiel d'opérateurs autoadjoints.

Définition 3.1 *Soit $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur autoadjoint. On appelle spectre essentiel de A et on note $\sigma_{ess}(A)$ le sous-ensemble du spectre défini ainsi : $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$ si et seulement si il existe une suite $u_n \in D(A)$ telle que $\|u_n\|_E = 1$, $\|Au_n - \lambda u_n\|_E \to 0$ et $u_n \rightharpoonup 0$ dans E faiblement.*
La suite u_n est appelée une suite singulière.

Nous allons à l'aide de cette définition décrire plus précisément ce qui caractérise les valeurs du spectre qui appartiennent au spectre essentiel et celles qui ne lui appartiennent pas.

Lemme 3.5 *Soit $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur autoadjoint. Si $\lambda \in \sigma(A)$ et $\lambda \notin \sigma_{ess}(A)$, alors λ est une valeur propre de A.*

Démonstration. D'après les théorèmes 3.1 et 3.2, $\lambda \in \mathbb{R}$ et il existe une suite $u_n \in D(A)$ telle que :

$$\|u_n\|_E = 1 \quad \text{et} \quad \|Au_n - \lambda u_n\|_E \to 0.$$

On peut donc extraire de u_n une sous-suite encore notée u_n qui converge faiblement vers u dans E. Si $\lambda \notin \sigma_{ess}(A)$, on a nécessairement : $u \neq 0$. De plus, on a

$$\forall v \in D(A) \quad (Au_n - \lambda u_n, v)_E = (u_n, Av - \lambda v)_E.$$

D'où, par passage à la limite :

$$\forall v \in D(A) \quad 0 = (u, Av - \lambda v)_E,$$

ce qui prouve que $u \in D(A)$ et par suite

$$(Au - \lambda u, v)_E = 0.$$

On en déduit que u est un vecteur propre associé à λ.

□

Lemme 3.6 *Soit $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur autoadjoint. Si λ est une valeur propre de A de multiplicité infinie, alors $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$.*

Démonstration. Soit (u_n) une base orthonormale du sous-espace propre $E(\lambda)$. On a donc : $Au_n - \lambda u_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$, et $(u_n, u_m)_E = \delta_{mn}$ pour tous $m, n \in \mathbb{N}$. Il est clair que la suite u_n converge faiblement vers 0 dans E. Le résultat s'en déduit.

□

Lemme 3.7 *Soit $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur autoadjoint. Soit $\lambda_n \in \sigma(A)$ une suite de points du spectre tels que $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = \lambda$ et $\lambda_n \neq \lambda$ pour tout n. Alors $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$.*

Démonstration. Pour tout n, d'après le théorème 3.2, il existe $u_n \in D(A)$ tel que :

$$\|u_n\|_E = 1 \quad \text{et} \quad \|Au_n - \lambda_n u_n\|_E \leq \frac{|\lambda - \lambda_n|}{n}.$$

On peut extraire de la suite u_n une sous-suite encore notée u_n qui converge faiblement vers u dans E. Pour conclure, il suffit de montrer que $u = 0$. Or on a :

$$\forall v \in D(A) \quad \lambda_n (u_n, v)_E = (\lambda_n u_n - Au_n, v)_E + (u_n, Av)_E.$$

Donc, par passage à la limite, on obtient :

$$\forall v \in D(A) \quad \lambda(u, v)_E = (u, Av)_E.$$

D'où $u \in D(A)$ et $Au = \lambda u$. Par conséquent :

$$(\lambda - \lambda_n)(u, u_n)_E = (Au - \lambda_n u, u_n)_E = (u, Au_n - \lambda_n u_n)_E.$$

D'où :

$$| (u_n, u)_E | \leq \frac{\|u\|_E}{n}.$$

On en déduit enfin :

$$\|u\|_E^2 = \lim_{n \to +\infty} (u_n, u)_E = 0,$$

d'où le résultat.

□

On déduit du lemme précédent le

Corollaire 3.5 *Soit $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur autoadjoint. Alors le spectre essentiel $\sigma_{ess}(A)$ est fermé.*

En résumé **:**

$\lambda \in \sigma(A)$ et $\lambda \notin \sigma_{ess}(A)$	$\Rightarrow$	λ est une valeur propre de multiplicité finie et isolée dans le spectre

La réciproque est vraie mais nous ne la démontrerons pas ici.
On appelle *spectre discret* de A et on note $\sigma_{disc}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A de multiplicité finie et isolées dans le spectre. D'après ce qui précède, on a :

$$\sigma_{ess}(A) \cup \sigma_{disc}(A) = \sigma(A) \quad \text{et} \quad \sigma_{ess}(A) \cap \sigma_{disc}(A) = \emptyset.$$

Exemple 3.1 : Soit A l'operateur non borné de $L^2(\mathbb{R})$ donné par :

$$D(A) = H^2(\mathbb{R}) \quad , \quad Au = -\frac{d^2u}{dx^2} \quad \forall u \in D(A).$$

Nous allons suivre deux démarches distinctes pour déterminer son spectre.

Méthode n°1 :
Nous avons vu (cf. exemple 2.10) que A est autoadjoint. De plus :

$$\forall u \in D(A) \quad (Au, u)_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{du}{dx} \right|^2 dx \geq 0.$$

D'après le corollaire 3.2, on a donc :

$$\sigma(A) \subset \overline{\Theta(A)} \subset \mathbb{R}^+.$$

Par ailleurs, il est clair que A n'admet pas de valeur propre, donc :

$$\sigma(A) = \sigma_{ess}(A).$$

Nous allons démontrer que :

$$\sigma(A) = \sigma_{ess}(A) = \mathbb{R}^+.$$

Comme $\sigma_{ess}(A)$ est fermé, il suffit d'établir l'inclusion suivante :

$$\mathbb{R}^{+*} \subset \sigma_{ess}(A).$$

Soit $\lambda > 0$ et $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi \neq 0$ telle que $\int_{\mathbb{R}} \varphi^2 dx = 1$. Posons :

$$\forall n \geq 1 \quad \psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \varphi(\frac{x}{n}) e^{i\sqrt{\lambda}x}.$$

Alors on vérifie aisément que ψ_n est une suite singulière associée à la valeur λ. En effet :
- $\int_{\mathbb{R}} \psi_n^2(x)\, dx = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} \varphi^2(y)\, dy = 1 \quad \forall n.$
- $\left| -\dfrac{d^2\psi_n}{dx^2}(x) - \lambda\psi_n(x) \right| \leq n^{-5/2} \left| \varphi''(\dfrac{x}{n}) \right| + 2n^{-3/2} \left| \varphi'(\dfrac{x}{n}) \right| \sqrt{\lambda}$ et par conséquent :

$$\|A\psi_n - \lambda\psi_n\|_E \to 0.$$

- Enfin, on vérifie aisément que $\int_{\mathbb{R}} \psi_n(x)\xi(x)\, dx \to 0$ pour toute fonction ξ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Par conséquent, ψ_n tend faiblement vers 0 dans $L^2(\mathbb{R})$.

En fait, dans ce cas particulier, il n'est pas nécessaire de vérifier le troisième point.

Méthode n°2 :
Nous allons utiliser la transformée de Fourier. On rappelle que, pour tout $u \in L^2(\mathbb{R})$, la fonction

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(x)\, e^{-ix\xi} dx$$

appartient elle aussi à $L^2(\mathbb{R})$ et que, d'après le théorème de Plancherel :

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

Autrement dit, la transformée de Fourier est un isométrie de $L^2(\mathbb{R})$. On peut alors, en suivant la remarque 2.6, définir l'opérateur $\hat{A}$ unitairement équivalent à A comme suit :

$$D(\hat{A}) = \{\hat{u}; u \in D(A)\} \quad \text{et} \quad \hat{A}\hat{u} = \widehat{Au}.$$

On vérifie aisément que :

$$D(\hat{A}) = \{\hat{u} \in L^2(\mathbb{R});\ \xi^2\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})\} \quad \text{et} \quad \hat{A}\hat{u}(\xi) = \xi^2\hat{u}(\xi).$$

Autrement dit, $\hat{A}$ est un opérateur de multiplication. Il est alors très facile de vérifier, tout comme dans l'exemple 2.13, que $\hat{A}$ n'a pas de valeur propre et que $\sigma(\hat{A}) = \sigma_{ess}(\hat{A}) = \mathbb{R}^+$. Or le spectre de A coïncide avec celui de $\hat{A}$. On a donc terminé.

Exemple 3.2 :

On peut étudier par des techniques tout à fait analogues l'opérateur $-\Delta$ dans $\mathbb{R}^n$. Plus précisemment, considérons l'opérateur autoadjoint A défini dans l'exemple 2.10. Nous allons étudier son spectre par transformée de Fourier. Le lecteur pourra, à titre d'exercice, faire une étude directe à l'aide de suites singulières.

Pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, la transformée de Fourier de u est donnée par :

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \int_{\mathbb{R}} u(x)\, e^{-i(x|\xi)} dx \quad \text{où} \quad (x \mid \xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i$$

et d'après le théorème de Plancherel :

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

On définit alors l'opérateur $\hat{A}$ unitairement équivalent à A comme ci-dessus, de sorte que :

$$D(\hat{A}) = \{\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n);\ |\xi|^2 \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})\} \quad \text{et} \quad \hat{A}\hat{u}(\xi) = |\xi|^2 \hat{u}(\xi).$$

où $\mid \xi \mid^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$.

Etudions le spectre de $\hat{A}$. Il est clair qu'il n'existe pas de fonction $\hat{u}$ non nulle dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $\left(\lambda - \mid \xi \mid^2\right) \hat{u}(\xi) = 0$ pour tout ξ. Par conséquent, $\hat{A}$ n'a pas de valeur propre. De même, il est clair que l'équation $\left(\lambda - \mid \xi \mid^2\right) \hat{u}(\xi) = \hat{f}$ n'admet une solution $\hat{u}$ pour tout $\hat{f}$ que si $\lambda \notin \mathbb{R}^+$. En conclusion, et tout comme dans le cas $n = 1$, on a :

$$\sigma(\hat{A}) = \sigma_{ess}(\hat{A}) = \mathbb{R}^+ = \sigma(A) = \sigma_{ess}(A).$$

3.3 Perturbation compacte

Il n'est pas toujours facile de déterminer directement le spectre essentiel d'un opérateur autoadjoint A. Souvent, on essaie de montrer que A peut s'écrire sous la forme $A = B + K$ où B est un opérateur autoadjoint dont on sait calculer le spectre essentiel par des techniques simples et K est un opérateur symétrique admettant certaines propriétés de compacité. On dit que A et B diffèrent d'une perturbation compacte. Généralement, on sait alors montrer que :

$$\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B).$$

Théorème 3.3 *Soit $B : D(B) \subset E \to E$ un opérateur autoadjoint et $K : E \to E$ un opérateur compact autoadjoint. Alors l'opérateur $A : D(A) \subset E \to E$ défini par :*

$$\begin{cases} D(A) = D(B) \\ \forall u \in D(A) \qquad Au = Bu + Ku \end{cases}$$

est autoadjoint et $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$.

Démonstration. 1 - Montrons tout d'abord que A est autoadjoint. Soit $v \in D(A^*)$. cela signifie que :

$$\exists w \in E \ / \ \forall u \in D(A) \quad (Au, v)_E = (u, w)_E.$$

Ceci s'écrit aussi :

$$\forall u \in D(A) \quad (Bu + Ku, v)_E = (u, w)_E$$

ou encore :

$$\forall u \in D(B) \quad (Bu, v)_E = (u, w - Kv)_E.$$

Il résulte de cette dernière égalité que $v \in D(B)$ et que $Bv = w - Kv$. Autrement dit, $v \in D(A)$ et $A^*v = Av = w$.
2 - Soit $\lambda \in \sigma_{ess}(B)$. Il existe donc une suite singulière u_n :

$$\begin{cases} u_n \in D(B) & \|u_n\|_E = 1 \\ u_n \rightharpoonup 0 & \text{dans } E \\ Bu_n - \lambda u_n \longrightarrow 0 & \text{dans } E \end{cases}$$

Comme K est compact, il existe une sous-suite encore notée u_n telle que $Ku_n \longrightarrow v$ dans E. Mais comme u_n tend faiblement vers 0, on a pour tout $w \in E$, $(Ku_n, w)_E = (u_n, Kw)_E \longrightarrow 0$ d'où $v = 0$. Il en résulte que $Au_n - \lambda u_n \longrightarrow 0$, donc u_n est également une suite singulière pour A et $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$. On a ainsi montré que $\sigma_{ess}(B) \subset \sigma_{ess}(A)$. On montre de même l'inclusion réciproque.

□

Définition 3.2 *Soit $B : D(B) \subset E \to E$ un opérateur autoadjoint et $K : D(K) \subset E \to E$ un opérateur tel que : $D(B) \subset D(K)$. On dit que K est B-compact si l'on a la propriété suivante : Si u_n est une suite de $D(B)$ telle que $(\|u_n\|_E + \|Bu_n\|_E)$ reste borné, alors la suite Ku_n admet une sous-suite convergente.*

Dans la suite, nous aurons recours au

Théorème 3.4 *Soit $B : D(B) \subset E \to E$ un opérateur autoadjoint borné inférieurement i.e. :*

$$\exists \gamma > 0 \text{ tel que } \ (Bu, u)_E + \gamma \|u\|_E^2 \geq 0 \quad \forall u \in D(B).$$

*Soit $K : D(K) \subset E \to E$ un opérateur symétrique tel que K soit B-compact
Alors l'opérateur $A : D(A) \subset E \to E$ défini par :*

$$\begin{cases} D(A) = D(B) \\ \forall u \in D(A) \qquad Au = Bu + Ku \end{cases}$$

est autoadjoint et $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$.

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin du

Lemme 3.8 *Soit $B : D(B) \subset E \to E$ un opérateur autoadjoint et $K : D(K) \subset E \to E$ un opérateur B-compact. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que :*

$$\forall u \in D(B) \quad \|Ku\|_E \leq C_\varepsilon \|u\|_E + \varepsilon \|Bu\|_E.$$

DÉMONSTRATION. Soit ε fixé. Supposons par l'absurde qu'il existe une suite $u_n \in D(K)$ telle que

$$\|Ku_n\|_E = 1 \text{ et } n\,\|u_n\|_E + \|Bu_n\|_E \leq 1.$$

Il en résulte que u_n tend vers 0 dans E. De plus, comme $\|Bu_n\|_E$ est borné, la suite Ku_n admet une sous-suite convergente que nous noterons encore Ku_n : $Ku_n \to v$ dans E. Mais pour tout $w \in D(K)$:

$$(Ku_n, w)_E = (u_n, Kw)_E \to 0$$

donc $v = 0$.
Par ailleurs $\|v\|_E = \lim \|Ku_n\|_E = 1$, d'où la contradiction.

□

Démontrons maintenant le théorème 3.4.
DÉMONSTRATION.
1 - Montrons tout d'abord que A est autoadjoint. Soit $\lambda > \gamma$. Alors, par hypothèse, $B + \lambda I$ est inversible. On a donc :

$$A + \lambda I = (B + \lambda I) + K = \left(I + K(B + \lambda I)^{-1}\right)(B + \lambda I).$$

Nous allons montrer que $A + \lambda I$ est inversible pour λ assez grand. Pour cela, il suffit de vérifier que, pour λ assez grand, $K(B + \lambda I)^{-1}$ est un opérateur borné de norme strictement inférieure à 1. Or on a, d'après le lemme 3.8 :

$$\left\|K(B + \lambda I)^{-1}u\right\|_E \leq C_\varepsilon \left\|(B + \lambda I)^{-1}u\right\|_E + \varepsilon \left\|B(B + \lambda I)^{-1}u\right\|_E \quad \forall u \in E,$$

et, d'après le corollaire 3.4 :

$$\begin{aligned} \left\|(B + \lambda I)^{-1}u\right\|_E &\leq \frac{1}{\lambda - \gamma}\|u\|_E \\ \left\|B(B + \lambda I)^{-1}u\right\|_E &\leq \frac{2\lambda - \gamma}{\lambda - \gamma}\|u\|_E \end{aligned}$$

En choisissant $\varepsilon < \frac{1}{2}$ puis λ assez grand, on obtient le résultat cherché. On conclut en appliquant le théorème 2.5.
2 - Pour montrer que $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$, on suit exactement la même démarche qu'au théorème précédent.

□

Exemple 3.3 : Soit B l'opérateur défini par :

$$\begin{cases} D(B) = H^2(\mathbb{R}^n) \\ Bu = -\Delta u \end{cases}$$

et K l'opérateur suivant :

$$Ku(x) = V(x)u(x)$$

où V est une fonction à valeurs réelles et à support compact Ω dans $\mathbb{R}^n$ telle que $V \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Alors on sait que B est autoadjoint et borné inférieurement. De plus, il est clair, grâce à l'injection compacte de $H^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, que K est $B-$compact. Il en résulte que l'opérateur A suivant :

$$D(A) = H^2(\mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad Au = -\Delta u + Vu$$

est autoadjoint et que :

$$\sigma_{ess}(A) = \mathbb{R}^+.$$

3.4 Le Principe du Min-Max

Le principe de Min-Max s'applique aux opérateurs autoadjoints bornés inférieurement ; il permet de caractériser par diverses formules dites "de Min-Max" les valeurs propres situées en dessous de la borne inférieure du spectre essentiel. On trouve dans la littérature plusieurs énoncés de ce Principe. Nous en donnons ici deux énoncés, comportant en particulier les différentes formules de Min-Max qui nous seront utiles pendant ce cours.

Soit A un opérateur autoadjoint non borné de E et $D(A)$ son domaine. On suppose que A est borné inférieurement i.e.

$$\exists C > 0 \ \text{ tel que } \ (Au, u)_E + C\|u\|_E^2 \geq 0, \quad \forall u \in D(A).$$

On rappelle que, d'après les résultats de la section précédente, tout point du spectre de A qui n'appartient pas au spectre essentiel est une valeur propre isolée de multiplicité finie.

On définit le quotient de Rayleigh suivant :

$$\mathcal{R}_A(u) = \frac{(Au, u)_E}{\| u \|_E^2} \qquad \forall u \in D(A), u \neq 0$$

On pose alors, pour tout entier $m, m \geq 1$:

$$\mu_m(A) = \inf_{V_m \in \mathcal{V}_m(D(A))} \sup_{u \in V_m, u \neq 0} \mathcal{R}_A(u) \tag{3.5}$$

où $\mathcal{V}_m(X)$ désigne l'ensemble des sous-espaces vectoriels de X de dimension m.
On pose également pour tout entier $m > 1$:

$$\tilde{\mu}_m(A) = \sup_{v^{(1)},..v^{(m-1)} \in E} \ \inf_{u \in [v^{(1)},..v^{(m-1)}]^{\perp}_{D(A)}, u \neq 0} \mathcal{R}_A(u) \tag{3.6}$$

où on note :

$$[v^{(1)}, ...v^{(m-1)}]^{\perp}_{D(A)} = \left\{ u \in D(A); \left(u, v^{(i)}\right)_E = 0, \ i = 1, m-1 \right\}$$

On démontre alors les résultats suivants :

Théorème 3.5
1) L'égalité suivante est satisfaite :

$$\mu_m(A) = \tilde{\mu}_m(A) \quad \text{pour tout } m > 1.$$

2) Principe du Min-Max.
Notons $\lambda_e(A)$ la borne inférieure du spectre essentiel de l'opérateur A (on pose $\lambda_e(A) = +\infty$ si $\sigma_{ess}(A) = \emptyset$) et $\mathcal{N}(A)$ le nombre de valeurs propres de A strictement inférieures à $\lambda_e(A)$ (comptées avec leur ordre de multiplicité). Alors :
• *$\mu_m(A) < \lambda_e(A)$ si et seulement si $\mathcal{N}(A) \geq m$. Dans ce cas, $\mu_1(A), \mu_2(A)...\mu_m(A)$ sont exactement les m premières valeurs propres de l'opérateur A.*
• *$\mu_m(A) = \lambda_e(A)$ si et seulement si $\mathcal{N}(A) < m$. Dans ce cas, $\mu_n(A) = \lambda_e(A)$ pour tout entier $n \geq m$.*

Pour établir ce théorème, nous allons démontrer deux lemmes préliminaires :

Lemme 3.9 *Les suites $\mu_m(A)$ et $\tilde{\mu}_m(A)$ sont croissantes. De plus, on a :*

$$\tilde{\mu}_m(A) \leq \mu_m(A) \qquad \forall m > 1. \tag{3.7}$$

Démonstration.
Pour établir (3.7), considérons un sous-espace V_m de $D(A)$ de dimension m et $(m-1)$ éléments de E notés $v^{(1)}$, ... $v^{(m-1)}$. Alors il existe un élément $\tilde{v}$ de V_m orthogonal à tous les $v^{(i)}$. Par conséquent :

$$\sup_{u \in V_m,\ u \neq 0} \mathcal{R}_A(u) \geq \inf_{u \in [v^{(1)},...v^{(m-1)}]^{\perp}_{D(A)},\ u \neq 0} \mathcal{R}_A(u).$$

Ceci étant vrai pour tout V_m et pour tous $v^{(1)}$, ... $v^{(m)}$, l'inégalité (3.7) s'en déduit.

□

Lemme 3.10 *On a :*

$$\mu_m(A) \leq \lambda_e(A) \quad \forall m \geq 1. \tag{3.8}$$

Démonstration. Il suffit de considérer le cas où $\lambda_e(A) < +\infty$.
Pour établir (3.8), on remarque que $\lambda_e(A)$ appartient au spectre essentiel de A. Par conséquent, il existe une suite singulière $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\left| \begin{array}{l} u_p \in D(A) \text{ et } \| u_p \|_E = 1, \text{ pour tout } p; \\ u_p \rightharpoonup 0 \text{ faiblement dans } E; \\ Au_p - \lambda_e(A) u_p \longrightarrow 0 \text{ fortement dans } E. \end{array} \right.$$

Le sous-espace de E engendré par cette suite est de dimension infinie. En effet, si tel n'était pas le cas, il existerait une sous-suite convergeant fortement dans E vers 0. Or ceci est impossible car $\| u_p \|_E = 1$, pour tout p. On peut donc trouver, pour tout ε strictement positif, m entiers $p_1, p_2...p_m$ pour lesquels :

1. l'espace V_m engendré par $u_{p_1}, ...u_{p_m}$ est de dimension m

2. $\|Au_{p_i} - \lambda_e(A)u_{p_i}\|_E \leq \varepsilon,$ pour $i = 1, m$
3. $\left|\left(u_{p_i}, u_{p_j}\right)_E\right| \leq \varepsilon,$ pour $i \neq j.$

Soit $u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_{p_i}$un élément de V_m. On vérifie que :

$$\left|\begin{array}{l} \| u \|_E^2 \geq (1 - 2m\varepsilon) \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2; \\ (Au, u)_E \leq (\lambda_e(A) + \varepsilon(1 + 2m + 2m\lambda_e(A))) \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2. \end{array}\right.$$

Par conséquent, il existe une constante $K_m(A)$ indépendante de ε telle que, pour tout u élément de V_m :

$$\mathcal{R}_A(u) \leq \lambda_e(A) + K_m(A)\varepsilon.$$

La majoration (3.8) s'en déduit.

□

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 3.5 :

DÉMONSTRATION.

▷ Le cas $m = 1$.

• Nous démontrons tout d'abord le principe du Min-Max appliqué à $\mu_1(A)$. On a (cf. lemme 3.4) :

$$\mu_1 = \inf \sigma(A).$$

D'après (3.8), deux cas peuvent se présenter :

$$\left|\begin{array}{l} i)\ \mu_1(A) = \lambda_e(A) \\ ii)\ \mu_1(A) < \lambda_e(A). \end{array}\right.$$

Dans le cas (i), il est clair qu'il n'existe aucune valeur propre de A strictement inférieure à $\lambda_e(A)$. Dans le second cas, $\mu_1(A)$ n'appartient pas à $\sigma_{ess}(A)$. C'est donc une valeur propre de l'opérateur A.

▷ Le Principe du Min-Max dans le cas $m > 1$.

• Supposons que $\mathcal{N}(A)$ est supérieur ou égal à m. Soient alors $\lambda_1, \lambda_2 ... \lambda_m$ les m premières valeurs propres de A :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 ... \leq \lambda_m < \lambda_e(A),$$

et $e_1, e_2 ... e_m$ des vecteurs propres associés tels que :

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, m.$$

En choisissant $V_m = [e_1, ..., e_m]$, on établit :

$$\mu_m(A) \leq \lambda_m. \tag{3.9}$$

Par ailleurs, posons $F = [e_1, ..., e_{m-1}]^{\perp}$ et soit A_F la restriction de l'opérateur A à l'espace F :

$$A_F : D(A_F) = D(A) \cap F \to F.$$

On vérifie que A_F est autoadjoint. Par conséquent, d'après le lemme 3.4, on a :

$$\inf_{u\in F\cap D(A), u\neq 0} \mathcal{R}_A(u) = \inf \sigma(A_F) = \lambda_m,$$

où $\sigma(A_F)$ désigne le spectre de l'opérateur A_F. On a par conséquent :

$$\tilde{\mu}_m(A) = \lambda_m. \tag{3.10}$$

De (3.7), (3.9) et (3.10), on déduit finalement :

$$\mu_m(A) = \tilde{\mu}_m(A) = \lambda_m. \tag{3.11}$$

• Supposons maintenant que $\mathcal{N}(A)$ est inférieur ou égal à $m-1$. Si $\mathcal{N}(A)$ est nul, on a d'après ce qui précède :

$$\mu_1(A) = \tilde{\mu}_1(A) = \lambda_e(A),$$

d'où

$$\mu_p(A) = \tilde{\mu}_p(A) = \lambda_e(A), \quad \forall p > 1,$$

d'après les lemmes 3.9 et 3.10.
Supposons donc que $\mathcal{N}$(A) est non nul et posons : $G = [e_1, ..., e_n]^\perp$, où $n = \mathcal{N}(A)$. On a cette fois :

$$\inf_{u\in G\cap D(A), u\neq 0} \mathcal{R}_A(u) = \inf \sigma(A_G) = \lambda_e(A),$$

où A_G désigne la restriction de A à G. Il en résulte que :

$$\tilde{\mu}_{n+1}(A) \geq \lambda_e(A). \tag{3.12}$$

De (3.7), (3.8) et (3.12), on déduit dans ce cas :

$$\tilde{\mu}_p(A) = \mu_p(A) = \lambda_e(A), \quad \text{pour tout } p > n. \tag{3.13}$$

□

Soit a une forme hermitienne de domaine $D(a)$, dense dans E. On suppose qu'il existe une constante C telle que :

$$a(u,u) + C\|u\|_E^2 \geq 0, \quad \forall u \in D(a),$$

et que $D(a)$ muni de la norme $\|u\|_{D(a)} = \sqrt{a(u,u) + C\|u\|_E^2}$ est un espace de Hilbert. Soit A l'opérateur non borné de E associé à la forme a (cf.section 2.5) et $D(A)$ son domaine. Il existe dans ce cas une version du Principe du Min-Max qui n'utilise que l'expression de la forme a. En effet, posons :

$$\mathcal{R}_a(u) = \frac{a(u,u)}{\| u \|_E^2} \quad \forall u \in D(a), u \neq 0$$

et

$$\mu_m(a) = \inf_{V_m\in\mathcal{V}_m(D(a))} \sup_{u\in V_m, u\neq 0} \mathcal{R}_a(u) \tag{3.14}$$

$$\tilde{\mu}_m(a) = \sup_{v^{(1)},..v^{(m-1)}\in E} \inf_{u\in[v^{(1)},..v^{(m-1)}]^\perp_{D(a)}, u\neq 0} \mathcal{R}_a(u) \tag{3.15}$$

Alors on a le :

Théorème 3.6 *Les inégalités suivantes sont satisfaites :*

$$\begin{cases} \mu_1(a) = \mu_1(A) \\ \mu_m(a) = \tilde{\mu}_m(a) = \mu_m(A) \quad \forall m > 1, \end{cases} \tag{3.16}$$

où $\mu_m(A)$ est défini par l'une des deux formules (3.5) ou (3.6).

Nous allons établir un lemme préliminaire qui sera l'outil essentiel de la démonstration :

Lemme 3.11 *$D(A)$ est dense dans $D(a)$ pour la norme $\|.\|_{D(a)}$.*

DÉMONSTRATION. Soit $u \in D(a)$ tel que $a(u,v) + C(u,v)_E = 0$ pour tout $v \in D(A)$. il suffit de montrer que $u = 0$. Or on peut réécrire ce qui précède sous la forme :

$$(u, Av + Cv)_E = 0 \quad \forall v \in D(A).$$

Comme l'opérateur $A + CI$ est inversible, la nullité de u s'en déduit.

□

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 3.6 :

DÉMONSTRATION. Commme $D(A)$ est inclus dans $D(a)$, on a directement :

$$\mu_m(a) \leq \mu_m(A), \quad \forall m \geq 1. \tag{3.17}$$

Par ailleurs, on établit aisément l'analogue de (3.7) :

$$\tilde{\mu}_m(a) \leq \mu_m(a) \quad \forall m > 1. \tag{3.18}$$

▷ le cas $m = 1$ Soit $u \in D(a)$. Il existe alors une suite $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de $D(A)$ telle que :

$$\|u_p - u\|_{D(a)} \underset{p \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

On a donc :

$$\left| \begin{array}{l} (Au_p, u_p) \longrightarrow a(u,u) \\ \| u_p \|_E \longrightarrow \| u \|_E \ . \end{array} \right.$$

Par conséquent :

$$\mathcal{R}_a(u) \geq \liminf \mathcal{R}_A(u_p) \geq \mu_1(A).$$

Ceci étant vrai pour tout u dans $D(a)$, on obtient finalement :

$$\mu_1(a) \geq \mu_1(A).$$

La première égalité dans (3.16) résulte de cette inégalité et de l'inégalité inverse (3.17).

▷ Le cas $m > 1$

Supposons que $\mathcal{N}(A)$ est supérieur ou égal à m et reprenons les notations introduites au cours de la démonstration précédente. On a :

$$\mu_m(A) = \inf_{u \in F \cap D(A), u \neq 0} \mathcal{R}_A(u).$$

Soit $u \in F \cap D(a)$. Il existe une suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $D(A)$ telle que $\|u_p - u\|_{D(a)} \longrightarrow 0$ quand $p \longrightarrow +\infty$. On pose alors :

$$\tilde{u}_p = u_p - \sum_{i=1}^{m-1}(u_p, e_i)e_i,$$

et on vérifie aisément que :

$$\left| \begin{array}{l} \tilde{u}_p \in D(A) \cap F \quad \forall p \in \mathbb{N}; \\ \| \tilde{u}_p \|_E \longrightarrow \| u \|_E \text{ quand } p \longrightarrow +\infty; \\ (A\tilde{u}_p, \tilde{u}_p) \longrightarrow a(u, u) \text{ quand } p \longrightarrow +\infty. \end{array} \right.$$

Il en résulte que :

$$\inf_{u\in F\cap D(A), u\neq 0} \mathcal{R}_A(u) \leq \inf_{u\in F\cap D(a), u\neq 0} \mathcal{R}_a(u),$$

et donc :

$$\mu_m(A) \leq \tilde{\mu}_m(a). \tag{3.19}$$

La seconde identité de (3.16) se déduit dans ce cas de (3.17), (3.18) et (3.19).
Supposons maintenant que $\mathcal{N}(A)$ est strictement inférieur à m. Avec les notations de la démonstration précédente, on a :

$$\mu_{n+1}(A) = \inf_{u\in G\cap D(A), u\neq 0} \mathcal{R}_A(u) = \lambda_e(A), \tag{3.20}$$

où $n = \mathcal{N}(A)$. On démontre alors comme plus haut que :

$$\mu_{n+1}(A) \leq \tilde{\mu}_{n+1}(a).$$

Il en résulte finalement que :

$$\mu_p(a) = \tilde{\mu}_p(a) = \lambda_e(A)$$

pour tout $p \geq n$, et en particulier pour $p = m$.

$\square$

3.5 Opérateurs autoadjoints compacts

Nous considérons dans cette section le cas particulier des opérateurs autoadjoints et compacts de E dans E. Nous allons montrer que pour de tels opérateurs, les vecteurs propres forment une base de E. Il s'agit donc d'un résultat de diagonalisation. Il généralise à la dimension infinie le résultat qui exprime que toute matrice hermitienne est diagonalisable dans une base orthonormée.
Pour cela, nous allons tout d'abord établir diverse propriétés sur le spectre d'un opérateur autoadjoint compact à l'aide du principe de Min-Max.
Dans toute la suite, E désigne un espace de Hilbert de dimension infinie.

Lemme 3.12 *Soit $A \in \mathcal{K}(E)$. Alors $0 \in \sigma(A)$.*

DÉMONSTRATION. En effet, si $0 \notin \sigma(A)$, alors A^{-1} est un opérateur borné de E. Mais alors l'identité de E, Id_E, est un opérateur compact car :

$$Id_E = A^{-1} \circ A,$$

et ceci est impossible car la boule unité d'un espace de Hilbert de dimension infinie n'est pas compacte.

□

Lemme 3.13 *Soit $A \in \mathcal{K}(E)$ un opérateur autoadjoint. Alors $\sigma_{ess}(A) = \{0\}$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$. Alors il existe une suite singulière (u_n) de E telle que :

$$\|u_n\|_E = 1, \quad \|Au_n - \lambda u_n\|_E \longrightarrow 0 \text{ et } u_n \rightharpoonup 0 \text{ dans } E.$$

La suite u_n étant bornée et l'opérateur A compact, il existe une sous-suite que nous noterons encore u_n telle que Au_n converge vers v dans E fortement. Mais alors on en déduit que :

$$\lambda u_n \longrightarrow v \text{ dans } E.$$

Comme u_n tend faiblement vers 0, ceci entraine que $v = 0$, d'où finalement :

$$|\lambda| = \|\lambda u_n\|_E = \|v\|_E = 0.$$

Nous avons donc montré que le spectre essentiel de A est soit vide soit réduit à $\{0\}$. Montrons qu'il ne peut pas être vide. Si tel était le cas, 0 serait soit dans l'ensemble résolvant, soit une valeur propre de multiplicité finie. Dans les deux cas la restriction de A à $(Ker\ A)^{\perp}$ serait un opérateur compact inversible, ce qui est impossible d'après le lemme 3.12.

□

On déduit directement de ce lemme les propriétés suivantes :

Corollaire 3.6 *Soit $A \in \mathcal{K}(E)$ un opérateur autoadjoint. Alors :*
- *Toute valeur propre non nulle de A est de multiplicité finie.*
- *Le seul point d'accumulation possible des valeurs propres est 0.*

Dans la suite, afin de simplifier la présentation, nous considérons des opérateurs positifs *i.e.* tels que :

$$(Au, u)_E \geq 0 \quad \forall u \in E.$$

Cette hypothèse ne restreint pas la généralité de notre propos, tous les résultats s'étendant aisément au cas quelconque. Soit donc $A \in \mathcal{K}(E)$ un opérateur positif. L'opérateur $-A$ est donc borné inférieurement par $-\|A\|$. D'après le lemme 3.13, la borne inférieure du spectre essentiel de $-A$ est égale à zero :

$$\lambda_e(-A) = 0.$$

En appliquant le principe du min-max à $-A$, on obtient les résultats ci-dessous portant sur l'opérateur A. Pour $m = 1, 2...3$, on pose :

$$\lambda_m(A) = \sup_{V_m \in \mathcal{V}_m(E)} \inf_{u \in V_m, u \neq 0} \frac{(Au, u)_E}{\|u\|_E^2}. \tag{3.21}$$

La suite $(\lambda_m(A))_{m \geq 1}$ est décroissante, positive ou nulle, et tend vers 0 quand $m \longrightarrow +\infty$.
D'après le théorème 3.5, on a :

Théorème 3.7 *Soit $A \in \mathcal{K}(E)$ un opérateur autoadjoint positif. De deux choses l'une :*
- *Soit A est de rang fini. Alors, si M désigne le rang de A, $\lambda_1(A)$, $\lambda_2(A)...\lambda_m(A), ...\lambda_M(A)$ sont les M valeurs propres strictement positives de A, ordonnées de la plus grande à la plus petite et répétées un nombre de fois égal à leur multiplicité. De plus :*

$$\lambda_m(A) = 0 \quad \forall m > M.$$

- *Soit A n'est pas de rang fini. Alors A admet une infinité dénombrable de valeurs propres strictement positives et de multiplicité finie qui peuvent être ordonnées en suite décroissante convergeant vers 0. De plus, si chaque valeur propre est répétée un nombre de fois égal à sa multiplicité, cette suite coïncide avec la suite $(\lambda_m(A))$.*

Notons que, pour tout $m \leq M$ si A est de rang M finiet pour tout $m \geq 1$ sinon, les sup et inf dans les formules 3.21 sont atteints et l'on peut donc écrire

$$\lambda_m(A) = \max_{V_m \in \mathcal{V}_m(E)} \min_{u \in V_m, u \neq 0} \frac{(Au, u)_E}{\|u\|_E^2}. \tag{3.22}$$

On a aussi d'après les formules (3.6) :

$$\lambda_m(A) = \min_{V_{m-1} \in \mathcal{V}_{m-1}(E)} \max_{u \in V_{m-1}^{\perp}, u \neq 0} \frac{(Au, u)_E}{\|u\|_E^2}. \tag{3.23}$$

Nous démontrons enfin la complétude des vecteurs propres :

Théorème 3.8 *Soit $A \in \mathcal{K}(E)$ un opérateur autoadjoint positif qui n'est pas de rang fini et soit $(\lambda_m(A))_{m \geq 1}$ la suite ordonnée de ses valeurs propres. Notons $(w_m)_{m \geq 1}$ une famille orthonormale de E telle que :*

$$Aw_n = \lambda_n w_n.$$

Alors la famille (w_m) est une base hibertienne de $(Ker\ A)^{\perp}$. Autrement dit, tout $u \in E$ se décompose de manière unique sous la forme :

$$u = u_0 + \sum_{m=1}^{+\infty} (u, w_m)_E \, w_m \tag{3.24}$$

(la série convergeant au sens de E) où $u_0 \in Ker\ A$ et l'on a :

$$\|u\|_E^2 = \|u_0\|_E^2 + \sum_{m=1}^{+\infty} |(u, w_m)_E|^2 .$$

De plus, la famille (w_m) diagonalise l'opérateur A au sens où :

$$Au = \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m (u, w_m)_E\, w_m.$$

(la série convergeant au sens de E).

Démonstration. Soit G l'espace engendré par la famille (w_n) et $F = Ker\ A \bigoplus G$. Pour démontrer que (w_m) est une base de $(Ker\ A)^{\perp}$, il suffit de montrer que $F^{\perp} = \{0\}$.
Comme F est stable par A, il en est de même de $F^{\perp}$ et l'on peut donc définir $\tilde{A}$, la restriction de A à $F^{\perp}$.
Nous allons montrer que $\tilde{A} = 0$, ce qui entrainera, puisque $Ker\ A \cap F^{\perp} = \emptyset$, que $F^{\perp} = \{0\}$.
Comme $\tilde{A}$ est un opérateur autoadjoint borné, on sait d'après le lemme 3.2 que $\left\|\tilde{A}\right\|$ appartient au spectre de $\tilde{A}$. Si l'on avait $\left\|\tilde{A}\right\| > 0$, $\lambda = \left\|\tilde{A}\right\|$ serait valeur propre de $\tilde{A}$ et donc de A. Il y aurait donc un vecteur propre de A élément de $F^{\perp}$, ce qui est imposssible par construction.

□

Corollaire 3.7 *Soit $A \in \mathcal{K}(E)$ un opérateur autoadjoint positif et injectif. Alors A admet une suite de valeurs propres strictement positives décroissant vers 0 et il existe une base hibertienne de E formée de vecteurs propres associés.*

Remarque 3.1 *On déduit en particulier de ce corollaire que dans un espace de Hibert non séparable, il ne peut pas exister d'opérateur autoadjoint compact positif et injectif.*

3.6 Opérateurs autoadjoints à résolvante compacte

Définition 3.3 *Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ un opérateur non borné. Alors A est dit à résolvante compacte si :*

$$\forall \lambda \in \rho(A) \quad (A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{K}(E). \tag{3.25}$$

On a le résultat suivant :

Théorème 3.9 – *Un opérateur $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ est à résolvante compacte si et seulement si il existe λ tel que $(A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{K}(E)$.*
– *Si A est à résolvante compacte, A est nécessairement non borné.*

DÉMONSTRATION. D'après l'identité résolvante (cf.(2.8)) :

$$\forall \lambda, \mu \in (A) \quad R_A(\mu) = R_A(\lambda) - (\mu - \lambda) R_A(\lambda) R_A(\mu).$$

Par conséquent, $R_A(\mu)$ est compact si $R_A(\lambda)$ l'est.
Supposons que $R_A(\lambda)$ est compact. Alors $0 \in \sigma\left(R_A(\lambda)\right)$ et par conséquent, il existe une suite (u_n) de E telle que $\|u_n\|_E = 1$ et $R_A(\lambda) u_n \longrightarrow 0$ dans E. On pose alors :

$$v_n = \frac{1}{\|R_A(\lambda) u_n\|} R_A(\lambda) u_n.$$

Il est clair que $v_n \in D(A)$ et que $\|v_n\|_E = 1$. De plus, on a :

$$A v_n = \frac{1}{\|R_A(\lambda) u_n\|} u_n + \lambda v_n.$$

Par conséquent $\|A v_n\|_E \longrightarrow +\infty$.

□

Nous allons maintenant déduire des résultats de la section précédente la théorie spectrale des opérateurs autoadjoints à résolvante compacte. Nous nous restreindrons au cas des opérateurs bornés inférieurement.

Théorème 3.10 *Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow E$ un opérateur autoadjoint borné inférieurement et à résolvante compacte. Alors il existe une base hilbertienne de E, $\{w_m \in D(A); m \geq 1\}$, et une suite de réels $(\lambda_m)_{m \geq 1}$ telles que :*

$$\begin{cases} \lambda_1 \leq \lambda_2 ... \leq \lambda_m \leq ... < +\infty \\ \lim\limits_{m \longrightarrow +\infty} \lambda_m = +\infty \\ A w_m = \lambda_m w_m, \quad m = 1, 2... \end{cases}$$

De plus, les valeurs λ_m admettent les caractérisations suivantes :

$$\lambda_m = \min_{V_m \in \mathcal{V}_m(D(A))} \max_{u \in V_m, u \neq 0} \frac{(Au, u)_E}{\|u\|_E^2} \tag{3.26}$$

et

$$\lambda_m = \max_{V_{m-1} \in \mathcal{V}_{m-1}(E)} \min_{u \in V_{m-1}^{\perp} \cap D(A), u \neq 0} \frac{(Au, u)_E}{\|u\|_E^2}. \tag{3.27}$$

DÉMONSTRATION. Supposons que :

$$(Au, u)_E \geq \lambda_0 \|u\|_E^2 \quad \forall u \in D(A).$$

Soit $\lambda < \lambda_0$. Alors $\lambda \in \rho(A)$ et par conséquent, l'opérateur $(A - \lambda I)^{-1}$ est compact et injectif. D'après le corollaire 3.7, il existe une base hilbertienne $(w_n)_{n \geq 1}$ de E et une suite $(\mu_n)_{n \geq 1}$ décroissante, strictement positive et tendant vers 0 telles que :

$$(A - \lambda I)^{-1} w_n = \mu_n w_n.$$

Il en résulte que :

$$w_n \in D(A) \ \text{ et } \ Aw_n = \lambda_n w_n$$

avec $\lambda_n = \lambda + \dfrac{1}{\mu_n}$.

Les formules de min-max s'obtiennent directement à partir du principe du Min-Max.

□

A l'aide du Principe du Min-Max, on obtient une caractérisation du domaine de l'opérateur A.

Corollaire 3.8 *Avec les notations du théorème 3.10, on a :*
- $u = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n w_n \in D(A) \iff \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n|^2 |u_n|^2 < +\infty$.
- $u = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n w_n \in D(A) \implies Au = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n u_n w_n$.

Démonstration. Supposons que $u \in D(A)$. Alors $Au \in E$ et par conséquent :

$$Au = \sum_{m=1}^{+\infty} (Au, w_m)_E w_m = \sum_{m=1}^{+\infty} (u, Aw_m)_E \, w_m = \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m \, (u, w_m)_E \, w_m,$$

la série convergeant dans E et :

$$\|Au\|_E^2 = \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m^2 \, (u, w_m)_E^2 \, .$$

Réciproquement, soit $u \in E$ tel que :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m^2 \, (u, w_m)_E^2 < +\infty. \tag{3.28}$$

La suite u_N définie par $u_N = \sum_{m=1}^{N} (u, w_m)_E \, w_m$ tend vers u dans E. De plus, la suite Au_N est de Cauchy dans E. En effet :

$$\|Au_N - Au_M\|_E^2 = \sum_{m=M+1}^{N} \lambda_m^2 \, (u, w_m)_E^2 < \varepsilon$$

pour N et M assez grands puisque la série converge. Donc Au_N tend vers v dans E. Comme l'opérateur A est fermé, il en résulte que $u \in D(A)$ et que $Au = v$.

□

Par ailleurs, supposons que A est associé à une forme bilinéaire a de domaine $D(a)$ et que $D(A)$ est un espace de Hilbert lorsque on le munit de la norme $\sqrt{a(u,u) + C\|u\|_E^2}$ pour une constante $C > 0$. Alors, on a :

$$\lambda_m = \min_{V_m \in \mathcal{V}_m(D(a))} \; \max_{u \in V_m, u \neq 0} \frac{a(u,u)}{\|u\|_E^2} \tag{3.29}$$

et

$$\lambda_m = \max_{V_{m-1}\in\mathcal{V}_{m-1}(E)} \min_{u\in V_{m-1}^{\perp}\cap D(a), u\neq 0} \frac{a(u,u)}{\|u\|_E^2}. \tag{3.30}$$

De plus, on a la caractérisation suivante de $D(a)$:

Corollaire 3.9 *Avec les notations du théorème 3.10, on a :*
- $u = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n w_n \in D(a) \iff \sum_{n=1}^{+\infty} |\lambda_n| |u_n|^2 < +\infty$.
- $u = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n w_n \in D(a) \implies a(u,u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n u_n^2$.

Démonstration. Supposons que $u \in D(a)$ et posons $b(u,v) = a(u,v) + C(u,v)_E$. Soit la suite u_N définie par $u_N = \sum_{m=1}^{N} (u, w_m)_E \, w_m$. Alors u_N est la projection orthogonale de u sur l'espace engendré par les m fonctions w_1, $w_2 ... w_m$. Par conséquent :

$$b(u_N, u_N) = \sum_{m=1}^{N} \lambda_m (u, w_m)_E^2 + C \sum_{m=1}^{N} (u, w_m)_E^2 \leq b(u,u).$$

Ceci prouve que la série de terme général $\lambda_m (u, w_m)_E^2$ converge.

Réciproquement, soit $u \in E$ tel que :

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m (u, w_m)_E^2 < +\infty. \tag{3.31}$$

La suite u_N définie par $u_N = \sum_{m=1}^{N} (u, w_m)_E \, w_m$ tend vers u dans E. De plus, la suite u_N est de Cauchy dans $D(a)$. En effet :

$$a(u_N - u_M, u_N - u_M) + C \|u_N - u_M\|_E^2 = \sum_{m=M+1}^{N} (\lambda_m + C)(u, w_m)_E^2 < \varepsilon$$

pour N et M assez grands puisque la série converge. Donc u_N tend vers v dans $D(a)$. Comme on sait par ailleurs que u_N tend vers u dans E, il en résulte que $u = v$ et $u \in D(A)$.

□