KHOUANE MEFTAH

Université Abou Bekr Belkaïd – Tlemcen

Faculté de Technologie

Laboratoire IS2M

RAPPEL DE PHYSIQUE 4

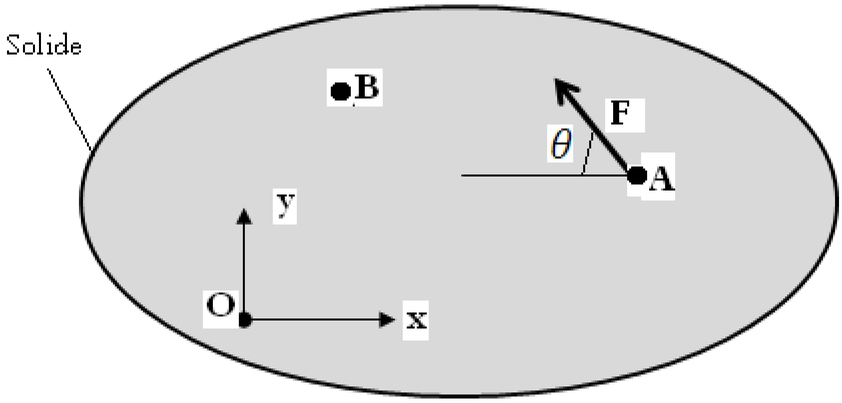
STATIQUE PAR LES TORSEURS

C'est quoi un moment ?

Un moment est le produit d'une force et d'une distance. Si une force provoque un mouvement rectiligne, un moment provoque un mouvement de rotation. Le moment est toujours calculé par rapport **un point**. C'est un **vecteur perpendiculaire** au plan formé par la force et la distance.

Exemple : Calculer le moment de la force $\vec{F}$ par rapport à B.

On donne : $F = 20N$, $\theta = 30°$, $A(4,2), B(1,3)$



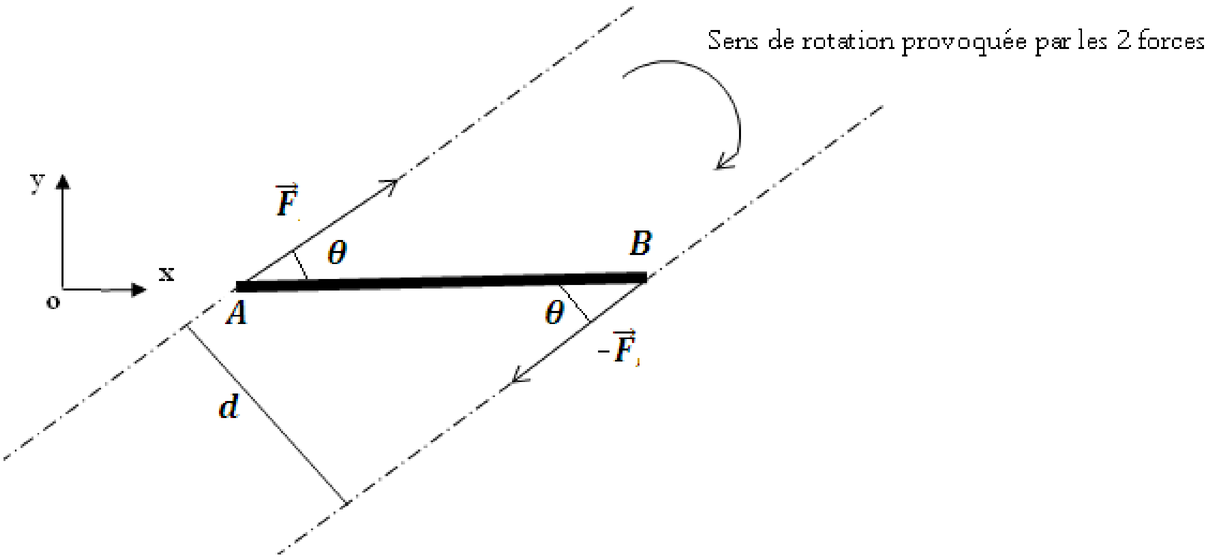
$$\vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{BA} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-3 \\ 0-0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -F\cos\theta \\ F\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -20\cos 30° \\ 20\sin 30° \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12.68\ Nm \end{pmatrix}$$

C'est quoi un couple ?

Un couple (ou un moment) est équivalent à deux forces égales et opposées. C'est un vecteur perpendiculaire au plan formé par les deux forces et la distance qui les sépare. Le couple à la même valeur en tout point du solide.

Exemple : Calculer le couple appliqué à la tige AB.

Données : $F = 30\ N, \theta = 30°$, $AB = 2m$.. Le plan formé par la tige AB et les deux forces est le plan oxy.



Le couple $\vec{C} \perp plan(\vec{F}, AB)$, donc $\vec{C} \perp plan\ Oxy$. Les deux forces provoquent une rotation suivant l'axe $(-Oz)$. Le couple $\vec{C}$ est donc dirigé suivant l'axe $(-Oz)$.

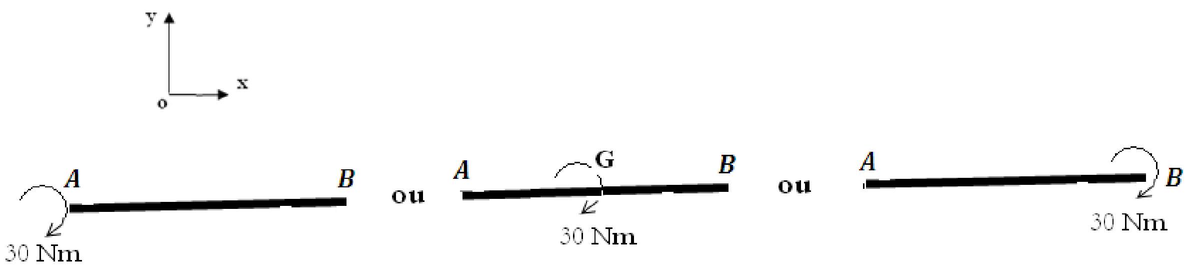
Le module de $\vec{C}$ est égal au produit de la force et de la distance qui les sépare d (appelé bars de levier) :

$$\vec{C} = -\mathrm{F}\ \mathrm{d}\,\vec{k} = -F\ AB\ sin\theta\,\vec{k} = -30\ 2\ sin30°\,\vec{k} = -30\ Nm\,\vec{k}$$

Si $\theta = 90°\ (\vec{F} \perp \overrightarrow{AB})$, alors $d = AB$

Cette valeur du couple est la même en tout point de la tige (A, B, G,…)

On peut donc remplacer le schéma précédent par l'une des schémas ci-dessous.



C'est quoi un totseur mécanique?

Un torseur d'action mécanique est un système force-couple constitué de deux grandeurs :

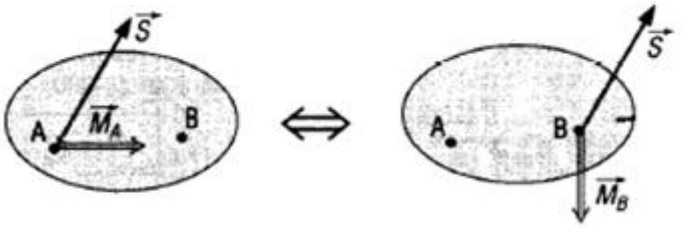
a) Une force $\vec{S}$ b) Un moment résultant $\vec{M}$

Comme le moment dépend du point choisi alors le torseur dépend aussi.

Notation : $\begin{Bmatrix} torseur \\ en\ A \end{Bmatrix} = \{T_A\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{S} \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} S_x & M_x \\ S_y & M_y \\ S_z & M_z \end{Bmatrix}_A$

Ecriture d'un torseur en différents points

Un torseur (T) étant connu en un point A, déterminons sa valeur en un point B.



$$\vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{B}} = \vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{A}} + \overrightarrow{\boldsymbol{BA}} \wedge \vec{\boldsymbol{S}}$$

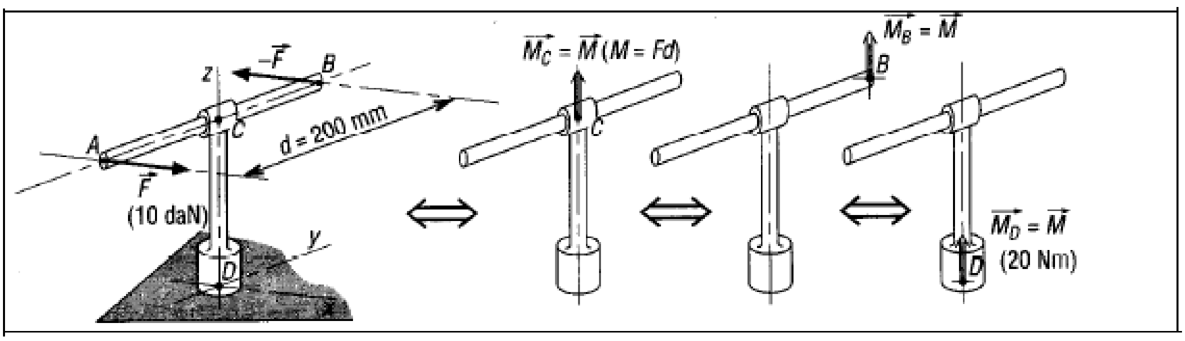
Torseur couple

Si la force $\vec{S}$ est nul et le moment $\vec{M}_A$ non nul , on obtient un torseur couple.

$$\{C\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{M} \end{Bmatrix} \; en\ tout\ point$$

Remarque : La relation $\vec{M}_B = \vec{M}_A + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{S}$ donne, dans la mesure où $\vec{S}$ est nulle : $\vec{M}_B = \vec{M}_A + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{0} = \vec{M}_A = \vec{M}$, autrement dit le moment a même valeur $\vec{M}$ en tout point et le torseur couple $\{C\}$ a même écriture en tout point de l'espace.

Exemple



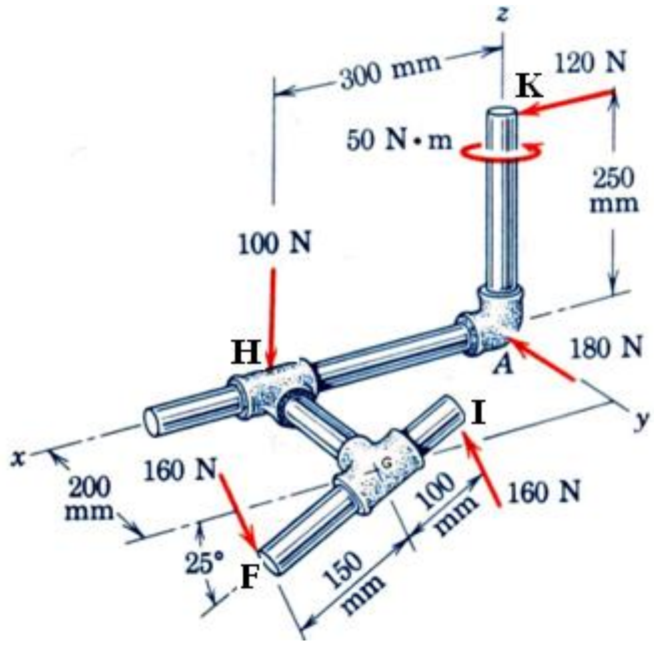
L'ensemble de deux forces $-\vec{F}$ et $\vec{F}$ est statiquement équivalent au couple $\vec{M}_C = \vec{M}$ en C de module M=Fd=100 0.2 = 20 Nm. Le couple a même valeur en tout point de la clé $\vec{M}_D = \vec{M}_C = \vec{M}_B = \vec{M}$. Il en résulte que le couple de serrage exercé sur l'écrou est $\vec{M}$ (20 Nm) d'axe z. Le torseur couple s'écrit : $\{C\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vec{M} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 20\vec{k} \end{Bmatrix}$ en tout point.

Principe fondamentale de la statique

Enoncé : Un solide (S), en équilibre sous l'action de n torseurs d'actions mécaniques $\{T_{1S}\}_A$, $\{T_{2S}\}_B$,…, $\{T_{nS}\}_N$ reste en équilibre si la somme des n torseurs tous écrits au même point I est égale au torseur nul : $\{T_{1S}\}_I + \{T_{2S}\}_I + \cdots + \{T_{nS}\}_I = \{0\}$

Exemple

Déterminer le torseur résultant en A.



Le solide est soumis à plusieurs torseurs appliqués en A, K, H, I et F

a) action en A

$$\{T\}_1 = \begin{Bmatrix} \vec{F}\,A \\ \vec{M}\,A \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -180 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A$$

b) action en K : $\{T\}_2 = \begin{Bmatrix} \vec{F}K \\ \vec{M}K \end{Bmatrix}_K = \begin{Bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 50 \end{Bmatrix}_K = \begin{Bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 30 \\ 0 & 50 \end{Bmatrix}_A$

$$\vec{M}_A(\vec{F}_K) = \vec{M}_K + \vec{AK} \wedge \vec{F}_K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.25 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 120 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \end{pmatrix}$$

c) action en H : $\{T\}_3 = \begin{Bmatrix} \vec{F}H \\ \vec{M}H \end{Bmatrix}_H = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -100 & 0 \end{Bmatrix}_H = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 30 \\ -100 & 0 \end{Bmatrix}_A$

$$\vec{M}_A(\vec{F}_H) = \vec{M}_H + \vec{AH} \wedge \vec{F}_H = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) Action en I et F

En I et F, nous avons 2 forces égales et opposées$(\vec{F}\ et - \vec{F})$, nous pouvons les remplacer par un torseur couple. Le plan formé par, la force $\vec{F}$ et le bras de levier $\overrightarrow{IF}$, est le plan xz, et par conséquent le couple est suivant l'axe y. Puisque $(\vec{F} \perp \overrightarrow{IF})$, alors :

$$\vec{C} = +F\ \ (IF)\ \ \vec{\jmath} = 160\ (0.15 + 0.1)\vec{\jmath} = +40\,\vec{\jmath}\ \mathrm{N.m}$$

Nous avons mis + car la rotation se fait suivant +y.

En I et F, les 2 forces sont remplacées par un torseur couple : $\{C\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 40 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$

Ce torseur s'écrit de la même façon en tout du solide.

$$\{T\}_A = \{T\}_1 + \{T\}_2 + \{T\}_3 + \{C\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -180 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 120 & 0 \\ 0 & 30 \\ 0 & 50 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 30 \\ -100 & 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 40 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{T\}_A = \begin{Bmatrix} 120 & 0 \\ -180 & 100 \\ -100 & 50 \end{Bmatrix}$$

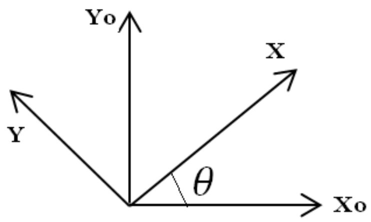
CINEMATIQUE DU SOLIDE

1- Dérivée d'un vecteur $\vec{Q}$

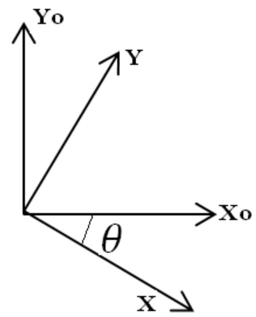
$$\left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_{R} + \vec{\omega}_{R/R_0} \wedge \vec{Q}$$

R_0 est le repère fixe, R est le repère mobile. $\vec{Q}$ est un vecteur, il peut être le déplacement, la vitesse, l'accélération ou autre. $\vec{\omega}_{R/R_0}$ est la vitesse de rotation du repère mobile R par rapport au repère fixe Ro.

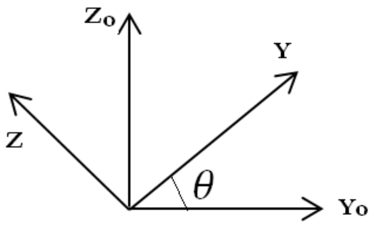
Exemples de vitesses de rotation



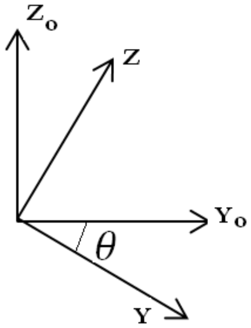
$\vec{\omega}_{R/R_o} = \dot{\theta}\ \vec{k}$



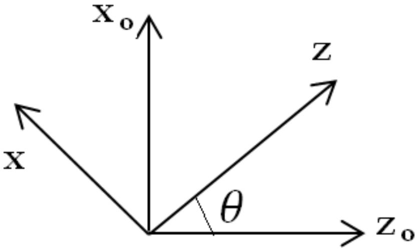
$\vec{\omega}_{R/R_o} = -\dot{\theta}\ \vec{k}$



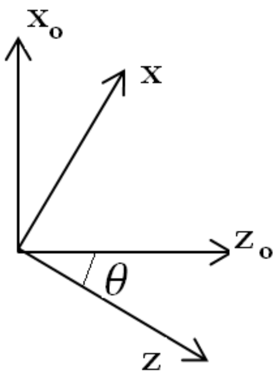
$\vec{\omega}_{R/R_o} = \dot{\theta}\ \vec{\imath}$



$\vec{\omega}_{R/R_o} = -\dot{\theta}\ \vec{\imath}$

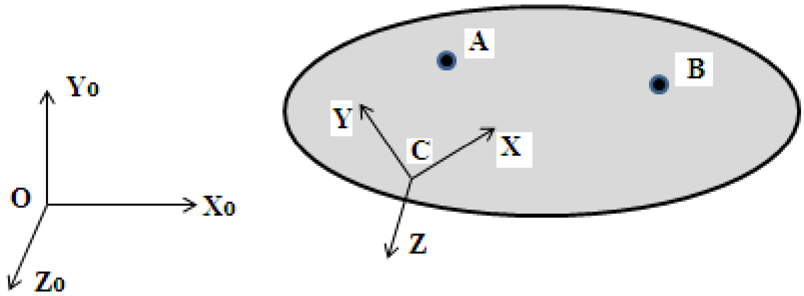


$\vec{\omega}_{R/R_o} = \dot{\theta}\ \vec{J}$



$\vec{\omega}_{R/R_o} = -\dot{\theta}\ \vec{J}$

2- Vecteurs vitesses



Soient A et B deux points appartenant au même solide, Ro(OXoYoZo) est le repère fixe, R(CXYZ) est un repère attaché au solide en mouvement. Nous avons :

$$\vec{v}_A = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{Ro} \qquad \vec{v}_B = \left(\frac{d\overrightarrow{OB}}{dt}\right)_{Ro}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{v}_B \overrightarrow{AB} = \vec{v}_A\, \overrightarrow{AB}$$

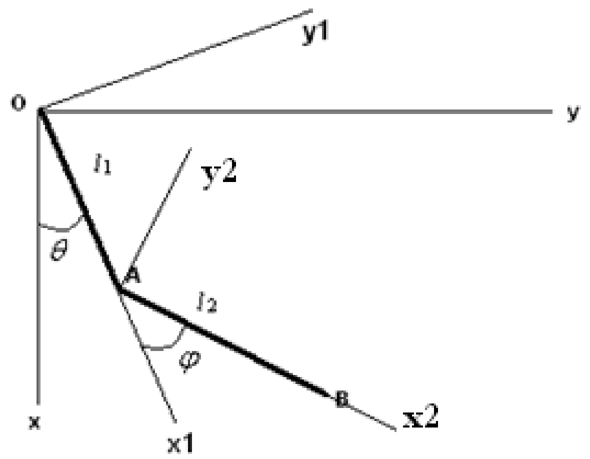
$\vec{\omega}$ est la vitesse de rotation du solide, c'est aussi la vitesse de rotation du repère R par rapport à Ro. $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{R/Ro}$

Exemple

Un bi-pendule est constitué de deux barres OA et AB de longueur l_1 et l_2.

Exprimer les composantes des vitesses $\vec{v}_A$ et $\vec{v}_B$ dans le repère fixe $R_0(Oxyz)$ et dans les deux repères mobiles R_2 et R_1.

O est fixe, le système oscille dans le plan (Oxy), le repère R_2 est lié à la barre AB, le repère R_1 est lié à la barre OA.



R_0= (Oxyz) : repère fixe,

R_1 =Ox1y1z1 : repère mobile $\vec{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{1/0}} = \dot{\boldsymbol{\theta}}\vec{\boldsymbol{k}}$

R_2=Ax2y2z2 repère mobile $\vec{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{2/0}} = \vec{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{2/1}} + \vec{\boldsymbol{\omega}}_{\mathbf{1/0}} = (\dot{\boldsymbol{\theta}} + \dot{\boldsymbol{\varphi}})\vec{\boldsymbol{k}}$; $(\vec{\boldsymbol{k}} = \vec{\boldsymbol{k}}_{\mathbf{1}} = \vec{\boldsymbol{k}}')$

a- Vitesse du point A

$$\vec{v}_A = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{R_0} ; \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} l_1 cos\theta \\ l_1 sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0} = \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} = \begin{pmatrix} l_1 cos\varphi \\ -l_1 sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2}$$

Repère R_0 :

$$\vec{v}_A = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{R_0} = \begin{pmatrix} -l_1\dot{\theta} sin\theta \\ l_1\dot{\theta} cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0}$$

Repère R_1:

$$\vec{v}_A = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{R_1} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ l_1\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

Repère R_2:

$$\vec{v}_A = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{R_2} + \vec{\omega}_{2/0} \wedge \overrightarrow{OA}$$

$$\vec{v}_A = \begin{pmatrix} -l_1\dot{\varphi}sin\varphi \\ -l_1\dot{\varphi}cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}+\dot{\varphi} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} l_1cos\varphi \\ -l_1sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1\dot{\theta}sin\varphi \\ l_1\dot{\theta}cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2}$$

b- Vitesse du point B

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_{2/0} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Remarque : il faut exprimer tous les vecteurs dans l'équation précédente dans le même repère.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} l_2\cos(\varphi+\theta) \\ l_2\sin(\varphi+\theta) \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0} = \begin{pmatrix} l_2\cos(\varphi) \\ l_2\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} = \begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2}$$

Repère R_0:

$$\vec{v}_B = \begin{pmatrix} -l_1\dot{\theta}sin\theta \\ l_1\dot{\theta}cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}+\dot{\varphi} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} l_2\cos(\varphi+\theta) \\ l_2\sin(\varphi+\theta) \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0}$$

$$\vec{v}_B = \begin{pmatrix} -l_1\dot{\theta}sin\theta - l_2(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\sin(\varphi+\theta) \\ l_1\dot{\theta}cos\theta + l_2(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\cos(\varphi+\theta) \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0}$$

Repère R_1:

$$\vec{v}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ l_1\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}+\dot{\varphi} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} l_2\cos(\varphi) \\ l_2\sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} = \begin{pmatrix} -l_2(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\sin(\varphi) \\ l_1\dot{\theta} + l_2(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

Repère R_2:

$$\vec{v}_B = \begin{pmatrix} l_1\dot{\theta}sin\varphi \\ l_1\dot{\theta}cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}+\dot{\varphi} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2} = \begin{pmatrix} l_1\dot{\theta}sin\varphi \\ l_1\dot{\theta}cos\varphi + l_2(\dot{\varphi}+\dot{\theta}) \\ 0 \end{pmatrix}_{R_2}$$

CINETIQUE

I- Quantité de mouvement

$$\vec{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{G}}$$ G est le centre de gravité du solide

II- Moment cinétique

Le moment cinétique du solide est égal au moment résultant en G de toutes les quantités de mouvement $m_i\vec{V}_M$ ou $\vec{V}_M dm$ de l'ensemble des points matériels M constituant le solide :

1. Moment cinétique au centre de gravité G

$\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{G}} = [\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{G}}]_{\boldsymbol{xyz}}\, \vec{\boldsymbol{\omega}}$ **;** $[\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{G}}]_{\boldsymbol{xyz}}$ est la matrice d'inertie du solide par rapport au repère Gxyz

2. Cas d'un solide ayant un point fixe A

Si A est un point fixe du solide dans le repère de référence

$\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{A}} = [\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{A}}]_{\boldsymbol{xyz}}\, \vec{\boldsymbol{\omega}}$; $[\boldsymbol{J}_{\boldsymbol{A}}]_{\boldsymbol{xyz}}$ est la matrice d'inertie du solide par rapport au repère Axyz

3. Moment cinétique en un point O quelconque

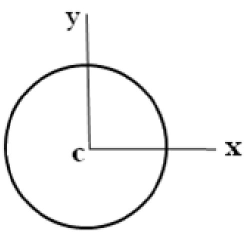
$$\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{O}} = \overrightarrow{\boldsymbol{OG}} \wedge \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{G}} + \vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{G}}$$

Règle de calcul : toujours exprimer dans le même repère, ou la même base, la matrice d'inertie $[J]$ et le vecteur en produit avec elle ($\vec{\omega}$ ou autre)

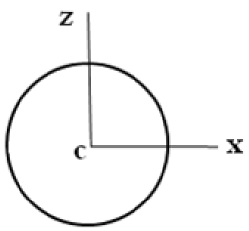
III- Matrices d’inertie

La matrice d’inertie d’un solide dépend du repère, si le centre ou les axes changent, alors la matrice d’inertie change. Exemple :

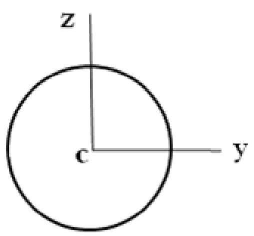
1- Cerceau de centre C, de masse M et de rayon R



$$[J_C]_{xyz} = \frac{MR^2}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

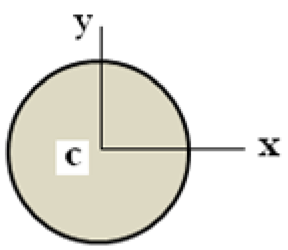


$$[J_C]_{xyz} = \frac{MR^2}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

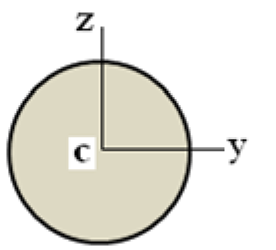


$$[J_C]_{xyz} = \frac{MR^2}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

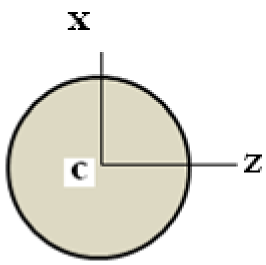
2- Disque de centre C, de masse M et de rayon R



$$[J_C]_{xyz} = \frac{MR^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

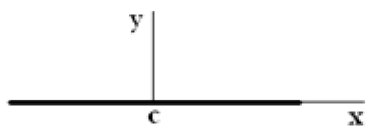


$$[J_C]_{xyz} = \frac{MR^2}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

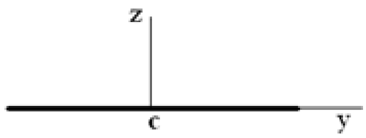


$$[J_C]_{xyz} = \frac{MR^2}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

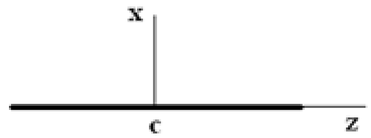
3- Tige (ou barre) de longueur l et de masse M



$$[J_C]_{xyz} = \frac{Ml^2}{12}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$[J_C]_{xyz} = \frac{Ml^2}{12}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



$$[J_C]_{xyz} = \frac{Ml^2}{12}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[J_C]_{xyz} = \frac{Ml^2}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[J_C]_{xyz} = \frac{Ml^2}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[J_C]_{xyz} = \frac{Ml^2}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

IV- Energie cinétique

L'énergie cinétique d'un solide en mouvement est égale à la somme des énergies cinétiques $\frac{1}{2}dmV_M^2$ de l'ensemble des points matériels M constituant le solide.

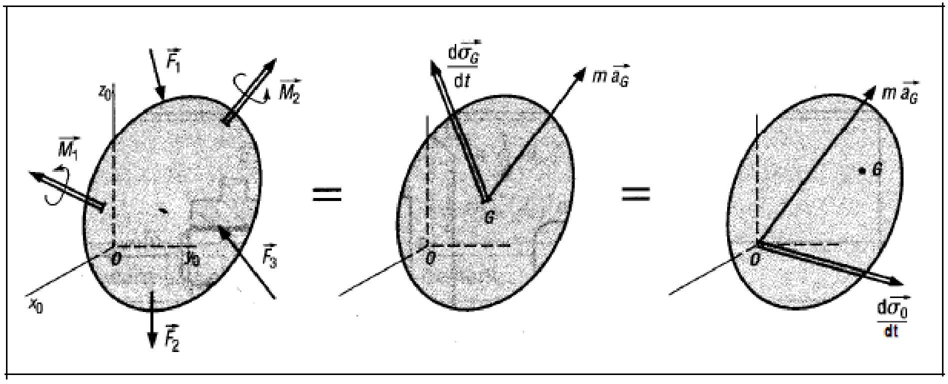
$$T = \frac{1}{2}\sum_{(S)} m_i \vec{V}_M^2 = \frac{1}{2}\int_{(S)} \vec{V}_M^2 dm$$

$$\boldsymbol{T = \frac{1}{2} m\vec{V}_G^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}\vec{\sigma}_G}$$

Si le solide possède un point fixe A, alors

$$\boldsymbol{T = \frac{1}{2}\vec{\omega}\vec{\sigma}_A}$$

V- Principe fondamental de la dynamique



$$\sum \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{ext}} = \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{1}} + \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{2}} + \cdots + \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{p}}}{\boldsymbol{dt}} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\left(\boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{V}}_{\boldsymbol{G}}\right) = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{a}}_{\boldsymbol{G}}$$

$$\sum \overrightarrow{\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{ext}})} = \overrightarrow{\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{1}})} + \overrightarrow{\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{2}})} + \cdots + \overrightarrow{\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{2}})} + \vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{1}} + \vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{2}} + \cdots + \vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{n}} = \frac{\boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{G}}}{\boldsymbol{dt}}$$

$\vec{a}_G$ est l'accélération du centre de gravité G, $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ sont les forces extérieures agissant sur le système et $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_n$ sont des couples purs.

Nous pouvons appliquer aussi la seconde équation par rapport à un autre point O autre que G, mais il faut que ce point O soit fixe.

$$\sum \overrightarrow{M_O(F_{ext})} = \overrightarrow{M_O(F_1)} + \overrightarrow{M_O(F_2)} + \cdots + \overrightarrow{M_O(F_2)} + \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \cdots + \vec{M}_n = \frac{d\vec{\sigma}_O}{dt}$$

VI – Théorèmes sur l'énergie

Enoncé : pour un solide isolé, le travail des forces extérieures, pendant un intervalle de temps $[t_1, t_2]$, est égal à la variation de l'énergie cinétique durant le même intervalle.

Autrement dit : la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique est égale à la puissance des efforts extérieurs.

$$(\boldsymbol{T})_{\boldsymbol{t_2}} - (\boldsymbol{T})_{\boldsymbol{t_1}} = \left[\boldsymbol{W}\left(\sum \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{ext}}\right)\right]_{\boldsymbol{t_1}}^{\boldsymbol{t_2}}$$

$$\frac{\boldsymbol{dT}}{\boldsymbol{dt}} = \mathbf{P}\left(\sum \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{ext}}\right)$$

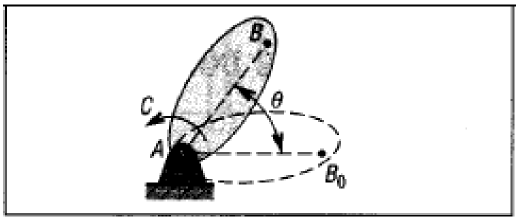
Rappelons que :

a) Le travail élémentaire ΔW d'une force $\vec{\mathrm{F}}$ dont le point d'application A se déplace de $\overrightarrow{\Delta l}$ est égale au produit scalaire de $\vec{\mathrm{F}}$ par $\overrightarrow{\Delta l}$.

$$\boxed{\mathrm{W}(\vec{\mathrm{F}}) = \vec{\mathrm{F}}\ \overrightarrow{\Delta l} \qquad W \text{ en J(Joules)}}$$

b) Le travail d'un couple C se déplaçant de l'angle θ est égal à :

$$\boxed{W = C\theta}$$



c) La puissance $\mathrm{P}(\vec{\mathrm{F}})$développée par une force $\vec{\mathrm{F}}$ dont le point le point d'application A se déplace à la vitesse $\vec{V}$ est égale au produit scalaire de $\vec{\mathrm{F}}$ par $\vec{V}$.

$$\boxed{\mathrm{P}(\vec{\mathrm{F}}) = \vec{\mathrm{F}}\,\vec{V} \qquad \text{P en W(Watts)}}$$

Cas particulier : Si les seules forces qui agissent sur le système dépendent d'une énergie potentielle E_p (poids ou actions exercées par des ressorts), l'énergie mécanique totale mise en jeu reste constante entre deux instants successifs.

$$\text{Energie mécanique totale } \ T + E_p = constante$$

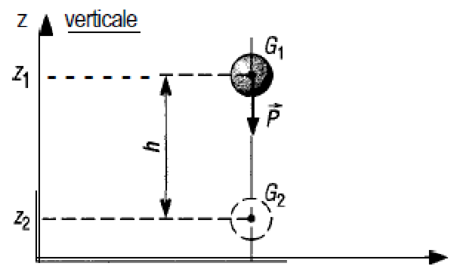
$$\text{ou } T_1 + E_{p1} = T_2 + E_{p2} = constante$$

a) Energie potentielle de pesanteur

L'énergie potentielle de pesanteur dépend de l'attitude z de l'objet, plus l'objet est haut et plus il y a d'énergie potentielle.

$E_p = mgz$

$E_{p1} - E_{p2} = mg(z_1 - z_2) = mgh$

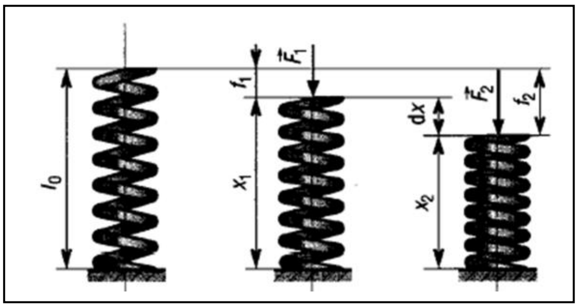


b) Energie potentielle élastique (ressort)

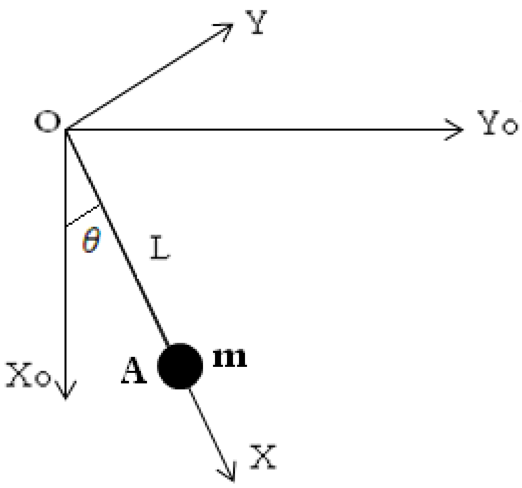
$E_p = \frac{1}{2}kf^2 \quad f = l_0 - x$

$E_{p2} - E_{p1} = \frac{1}{2}k(f_2^2 - f_1^2)$

ent



Exemple : Un point matériel A de mass m, attaché à un fil de longueur L et de masse négligeable, oscille dans le plan vertical OXoYo. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique et calculer la période des petites oscillations.



Solution :

Nous avons vu dans un exemple précédent que $\vec{V}_A = L\,\dot{\theta}\,\vec{j}$

L'énergie cinétique du point matériel est : $T = \frac{1}{2}MV_A^2 = \frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2$

Le point matériel A est soumis à 2 forces : le poids $\vec{P}$ et la tension du fil $\vec{T}$. D'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{dT}{dt} = \mathrm{P}\left(\sum \vec{F}_{ext}\right) = \vec{P}\vec{V}_A + \vec{T}\vec{V}_A = \vec{P}\vec{V}_A = P\ V_A\, cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$\vec{T}\vec{V}_A = 0$ car $\vec{T} \perp \vec{V}_A$

$$ML^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -MgL\,\dot{\theta}\,sin\theta$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}sin\theta = 0$$

La période des petites oscillations est égale à $2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

Autre méthode :

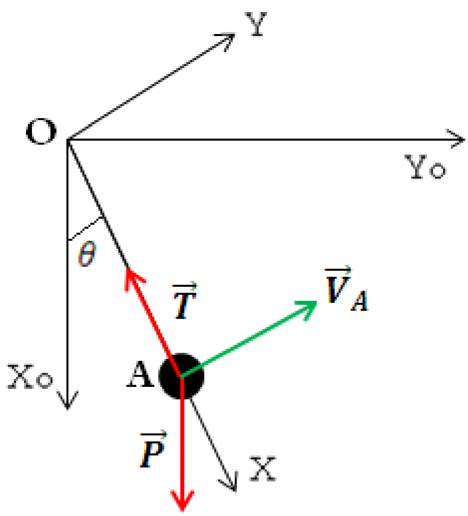
La tension est perpendiculaire au déplacement du point, son travail est nul. Par conséquent l'énergie mécanique se conserve : $T + E_p = Cte$

$E_p = -MgLcos\theta$

$$\frac{1}{2}ML^2\dot{\theta}^2 - MgLcos\theta = Cte$$

En dérivant par rapport au temps, nous obtenons :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}sin\theta = 0$$

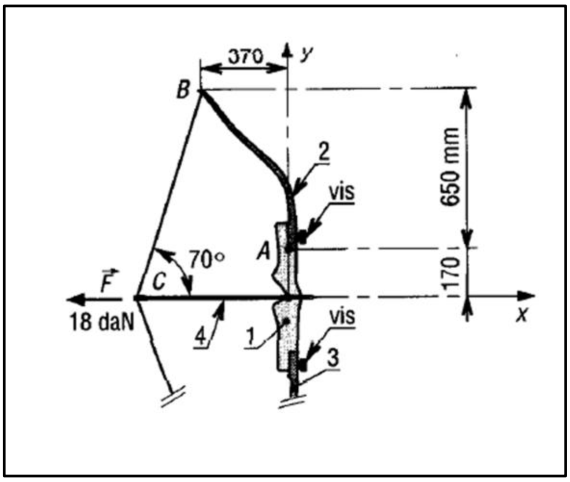


Exercice 1

Un arc se compose de trois parties démontables (1), (2) et (3). Après assemblage par vis, l'ensemble est parfaitement solidaire. Si le tireur exerce un effort $\vec{F}$ de 180 N sur la corde, calculer :

1- La tension $\vec{T}$ appliquée par la corde en B sur la Partie (2) de l'arc.

2- Calculer le torseur exercé entre (1) et (2) au Point A.



Exercice 2

Le système bielle-manivelle sert de base à de multiples appareils. Le mécanisme se compose d'une manivelle OA de masse M_1 articulée en O sur un bâti et en A sur la bielle AB. La bielle de masse M_2 est articulée en B sur le piston (3) animé d'un mouvement de translation rectiligne par rapport au bâti (direction ox). La manivelle OA possède une vitesse de rotation constante $\boldsymbol{\omega}$. Sachant que : $OA = 1,\ AB = \sqrt{3},\ \theta = 60°$.

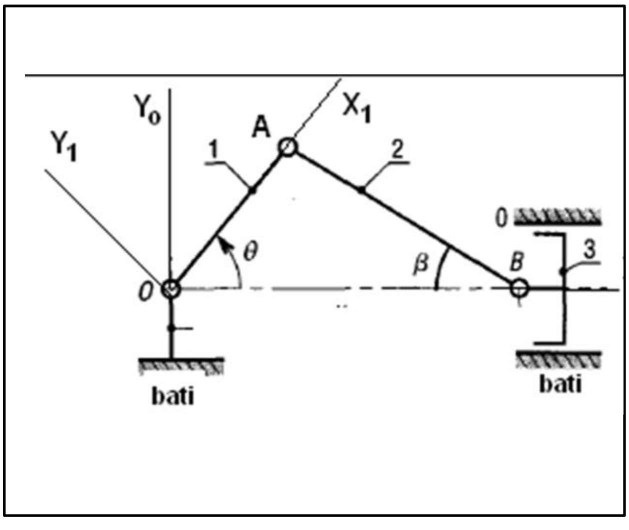
1- Calculer la valeur de l'angle β

Calculer en fonction de $\boldsymbol{\omega}$:

2- la vitesse de rotation de la bielle AB.

3-la vitesse et l'accélération du point A.

4- la vitesse et l'accélération du centre



de gravité G de la bielle.

5- l’énergie cinétique de la manivelle.

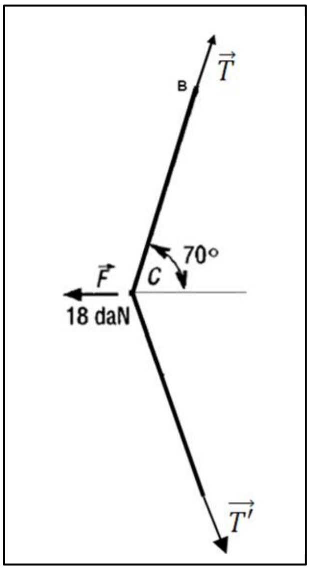
6-l’énergie cinétique de la bielle

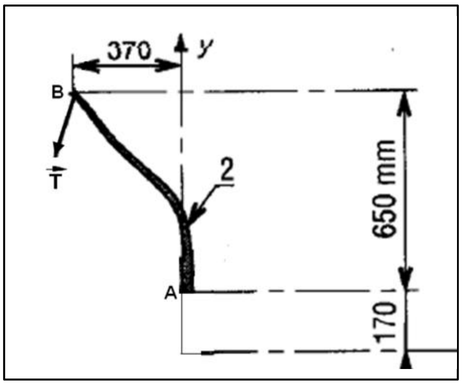
Solution exercice 1

1- Isolons la corde et appliquons le principe de la statique ;

$$\vec{F} + \vec{T} + \vec{T'} = \vec{0} \Longrightarrow \begin{cases} -F + T cos70° + T' cos70° = 0 \\ T sin70° - T' sin70° = 0 \end{cases}$$

$$T = T' = \frac{F}{2cos70°} = 263{,}14\ N$$





2- La partie (2) de l’arc est soumise à 2 torseurs :

a- le 1^{er} torseur $\{T_1\}_B$ est appliqué en B, il est dû à la tension de la corde

$$\{T_1\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{T} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} \vec{T} \\ \overrightarrow{M_A} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} -T cos70° & \\ -T sin70° & ? \\ 0 & \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} -90 & 0 \\ -247.27 & 0 \\ 0 & 150 \end{Bmatrix}_A$$

$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_B} + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{T} = \vec{0} + \begin{pmatrix} -0.37 \\ 0.65 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -T cos70° \\ -T sin70° \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 150 \end{pmatrix}$$

b- le 2ème torseur $\{T_2\}_A$ est appliqué en A, il est dû au contact avec la partie (1) de l’arc.

La partie (2) de l'arc est en statique, on a donc :

$$\{T_1\}_B + \{T_2\}_A = \{0\} \Longrightarrow \{T_2\}_A = -\{T_1\}_B = \begin{Bmatrix} 90 & 0 \\ 247.27 & 0 \\ 0 & -150 \end{Bmatrix}_A$$

Solution exercice 2

1- Relation entre $\boldsymbol{\theta}$ et $\boldsymbol{\beta}$

$$AH = \boldsymbol{OA\ sin\theta = AB\ sin\beta}$$

$$sin\beta = \frac{OA}{AB} sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} sin60° = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \boldsymbol{\beta = 30°}$$

2- Vitesse de rotation de la bielle

$$sin\beta = \frac{OA}{AB} sin\theta \Longrightarrow \dot{\beta} cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}} \dot{\theta} cos\theta \Longrightarrow \dot{\beta} = \frac{1}{\sqrt{3}} \omega \frac{cos\theta}{cos\beta} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\omega}{3}$$

$$\boldsymbol{\vec{\omega}_{bielle} = -\dot{\beta}\vec{k}_1 = -\frac{\omega}{3}\vec{k}_1}$$

3- Vitesse et accélération du point A

$$\overrightarrow{OA} = OA\,\vec{\imath}_1 \Longrightarrow \vec{V}_A = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right)_{R_1} + \vec{\omega}_{R1/R0} \wedge \overrightarrow{OA} = \vec{\omega}_{R1/R0} \wedge \overrightarrow{OA}$$

$$\vec{V}_A = \omega\overrightarrow{k_1} \wedge OA\,\vec{\imath}_1 = \omega\ OA\,\vec{\jmath}_1 = \boldsymbol{\omega\ \vec{\jmath}_1}$$

$$\boldsymbol{\vec{V}_A = \omega\ \vec{\jmath}_1}$$

$$\vec{\gamma}_A = \left(\frac{d\vec{V}_A}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{V}_A}{dt}\right)_{R_1} + \vec{\omega}_{R1/R0} \wedge \vec{V}_A = \vec{\omega}_{R1/R0} \wedge \vec{V}_A = \omega\overrightarrow{k_1} \wedge \omega\ \vec{\jmath}_1$$

$$\boldsymbol{\vec{\gamma}_A = -\omega^2\ \vec{\imath}_1}$$

4- Vitesse et accélération du point G

$$\vec{V}_G = \vec{V}_A + \vec{\omega}_{bielle} \wedge \overrightarrow{GA}$$

Sachant que $\theta = 60°\ et\ \beta = 30°$, cela implique que l'angle $\widehat{OAB} = 90°$

Et par conséquent $\overrightarrow{GA} \parallel \vec{j}_1$

$$\overrightarrow{GA} = \frac{AB}{2}\vec{j}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}_1$$

$$\vec{V}_G = \omega\ \vec{j}_1 - \frac{\omega}{3}\vec{k}_1 \wedge \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}_1$$

$$\boldsymbol{\vec{V}_G = \omega\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\vec{\imath}_1 + \vec{j}_1\right)}$$

$$\vec{\gamma}_G = \left(\frac{d\vec{V}_G}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{V}_G}{dt}\right)_{R_1} + \vec{\omega}_{R1/R0} \wedge \vec{V}_G = \vec{\omega}_{R1/R0} \wedge \vec{V}_G = \omega\overrightarrow{k_1} \wedge \omega\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}\vec{\imath}_1 + \vec{j}_1\right)$$

$$\boldsymbol{\vec{\gamma}_G = -\omega^2\left(\vec{\imath}_1 + \frac{\sqrt{3}}{6}\vec{j}_1\right)}$$

5- Energie cinétique de la manivelle

$$E_c = \frac{1}{2}\vec{\omega}_{manivelle}\vec{\sigma}_o(manivelle) = \frac{1}{2}\vec{\omega}_{manivelle}[J_o]_{x1y1z1}\vec{\omega}_{manivelle}$$

$$E_c = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 0 & \omega\end{pmatrix}\frac{M_1OA^2}{3}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \omega\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{E_c = \frac{1}{6}M_1\omega^2}$$

6- Energie cinétique de la bielle

$$E_c = \frac{1}{2} M_2 V_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}_{bielle} \vec{\sigma}_G(bielle) = \frac{1}{2} M_2 V_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega}_{bielle} [J_G]_{x1y1z1} \vec{\omega}_{bielle}$$

$$E_c = \frac{1}{2} M_2 \left(\frac{13}{12} \boldsymbol{\omega^2} \right) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\omega}{3} \end{pmatrix} \frac{M_2 AB^2}{12} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\omega}{3} \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{E_c = \frac{5}{9} M_2 \omega^2}$$