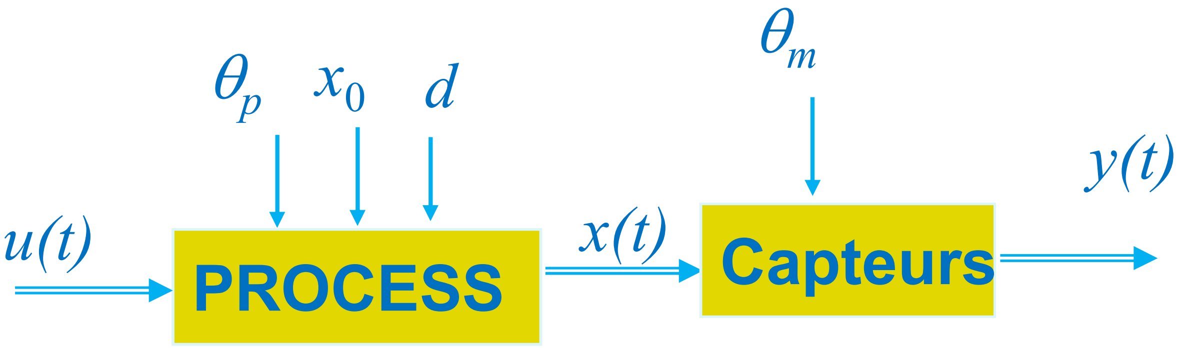
Chap.3 REDONDANCE ANALYTIQUE

Représentation

Modèle du système sain

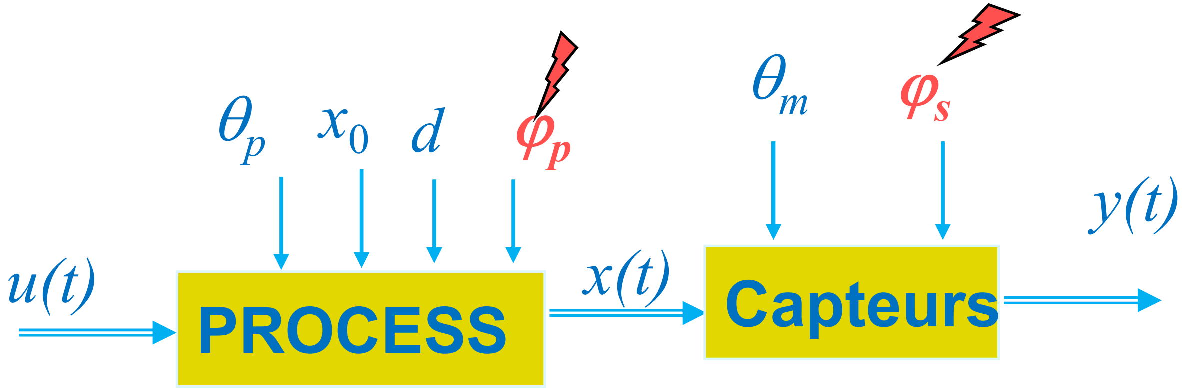


d : Perturbations

θ : Paramètres

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,u,d,\theta_p,t) \\ y = C(x,\theta_m) \end{cases}$$

Modèle du système défectueux



$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,u,d,\theta_p,\varphi_p,t) \\ y = C(x,\theta_m,\varphi_s) \end{cases}$$

Représentation par espace d'état

Cas linéaire

Perturbations

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax + Bu + Ed + F\varphi \\ y = \quad Cx + Du + Gd + H\varphi \end{cases}$$

Défauts

Case non linéaire

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = F(x,u,d,\varphi) \\ y = C(x,u,d,\varphi) \end{cases}$$

Principe Général

Modèle analytique

Équations de mesure
ou
Etat et Équations de mesure

$$\text{RRA} : \Phi(u,y) = 0$$

Hors ligne
Techniques d'élimination des de variables inconnues

RESIDUS

$$\text{r} = \Phi(u_{réel}, y_{réel}) = 0$$

En ligne
Calcul des RRAs (système réel)

Redondance Analytique :comment générer les RRAs ?

- C'est quoi une RRA ?
  - Etant donné

$$(1)\begin{cases}\dot{x} = f(x,u) \\ y = C(x)\end{cases}$$

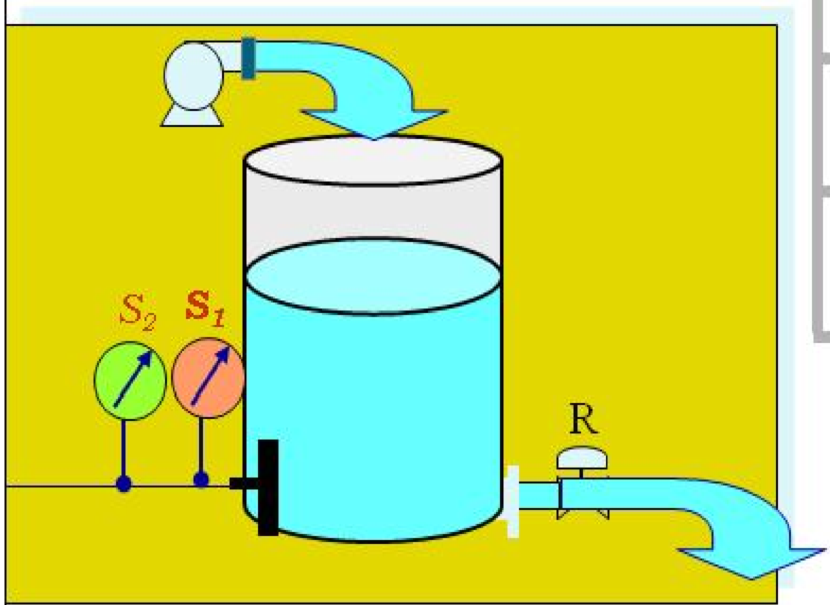
  - *Une RRA exprimer la différence entre les informations fournies par le système réel et celles fournies par son modèle de fonctionnement normal.*

$$x = C^{-1}(y) \Rightarrow (1) \quad \Longrightarrow \quad \Phi(\frac{d(C^{-1}(y))}{dt}, y, u) = RRA$$

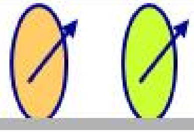
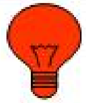
- Ce que c'est qu'un résidu

$$\begin{matrix} u \longrightarrow \\ y \longrightarrow \end{matrix} \boxed{\Phi\left(\frac{d(C^{-1}(y))}{dt}, y, u\right)} \longrightarrow r$$

Redondance matérielle et analytique

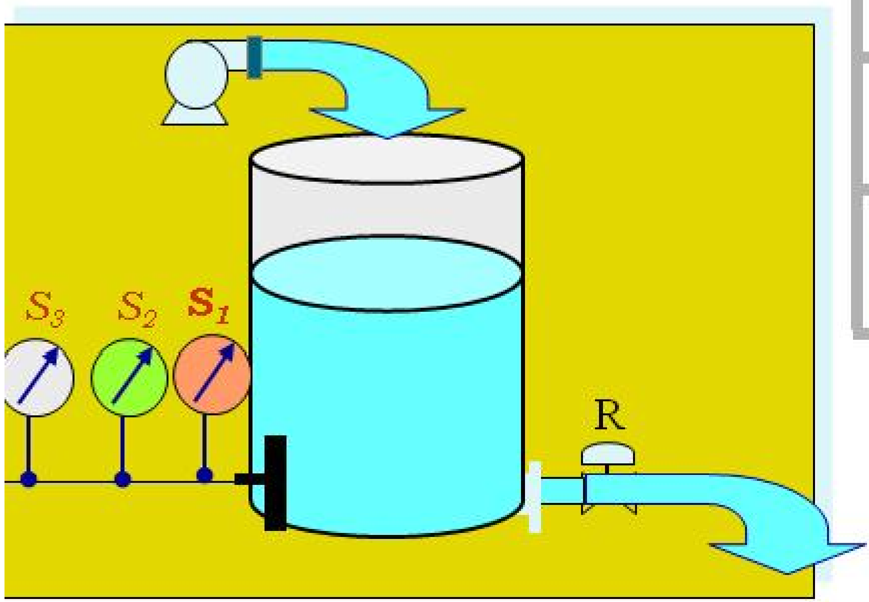


Redondance Marérielle

Capteurs	Détection	Isolation
		S_1 or S_2

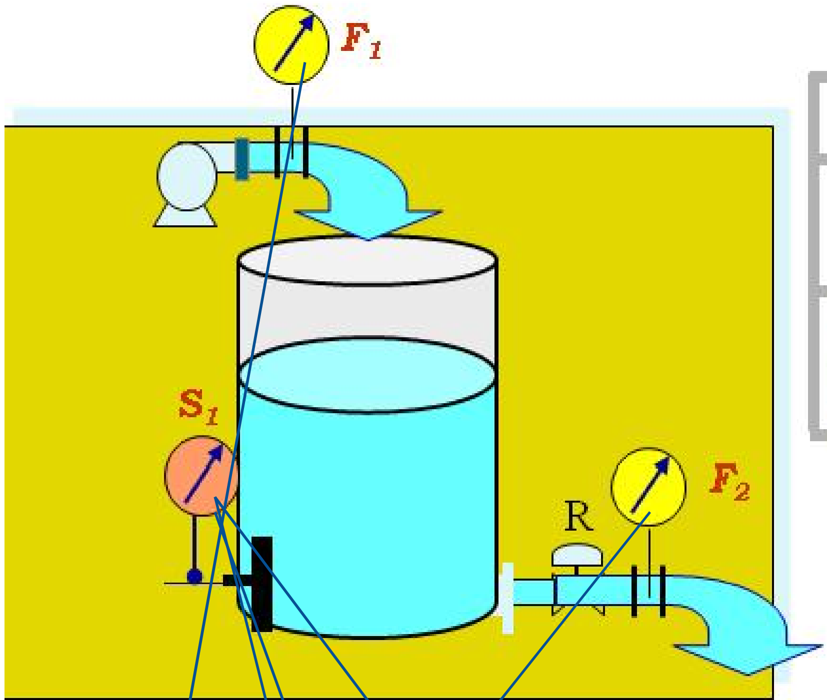
Redondance matérielle et analytique

Redondance Marérielle

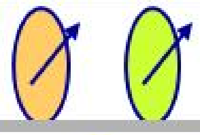
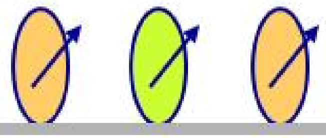


Capteurs	Détection	Isolation
		S_1 *or* S_2
		S_2

Redondance matérielle et analytique



Redondance Marérielle

Capteurs	Détection	Isolation
		S_1 or S_2
		S_2

$$r_1 = F_1 - R * S_1 - C.\frac{dS_1}{dt} \approx 0$$

$$r_2 = F_2 - R * S_1 \approx 0$$

Redondance Analytique

Analyse de la Surveillabilité

	F_1	S_1	fuite	Vanne R	F_2
r_1	1	1	1	1	0
r_2	0	1	0	1	1

Redondance la + simple : redondance matérielle

- La redondance matérielle utilise uniquement des équations de mesure (par conséquent, elle ne peut détecter que les défauts des capteurs)

- Exemple : redondance double

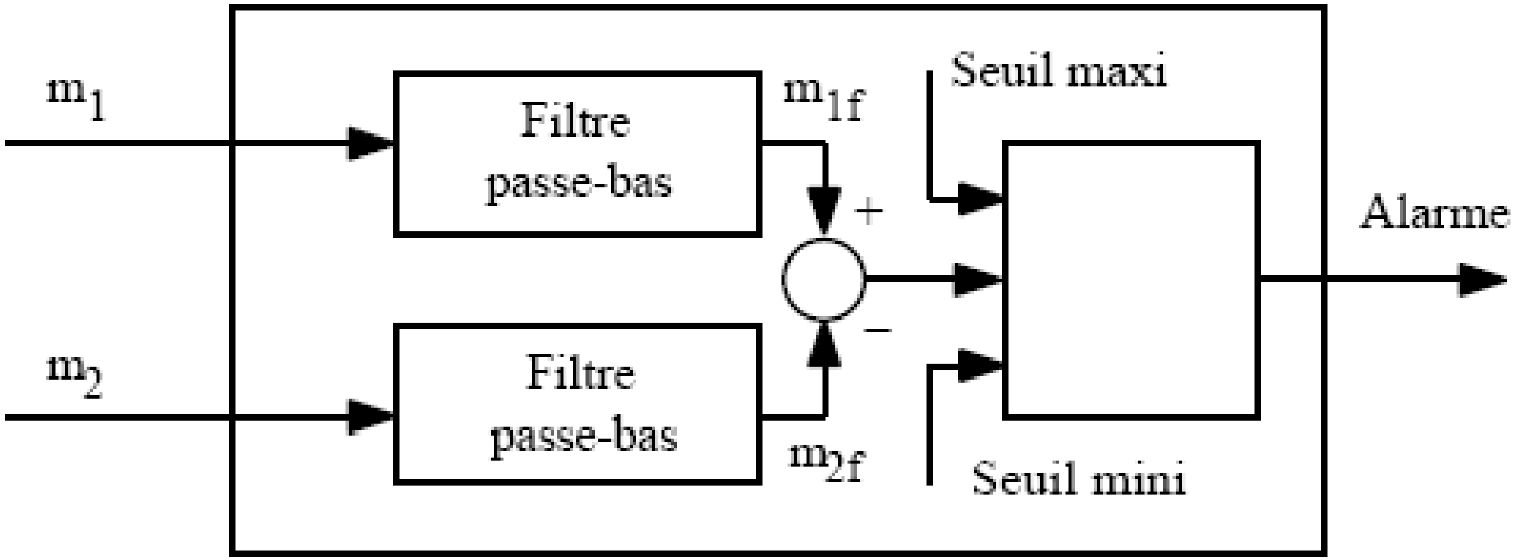
Modèle :

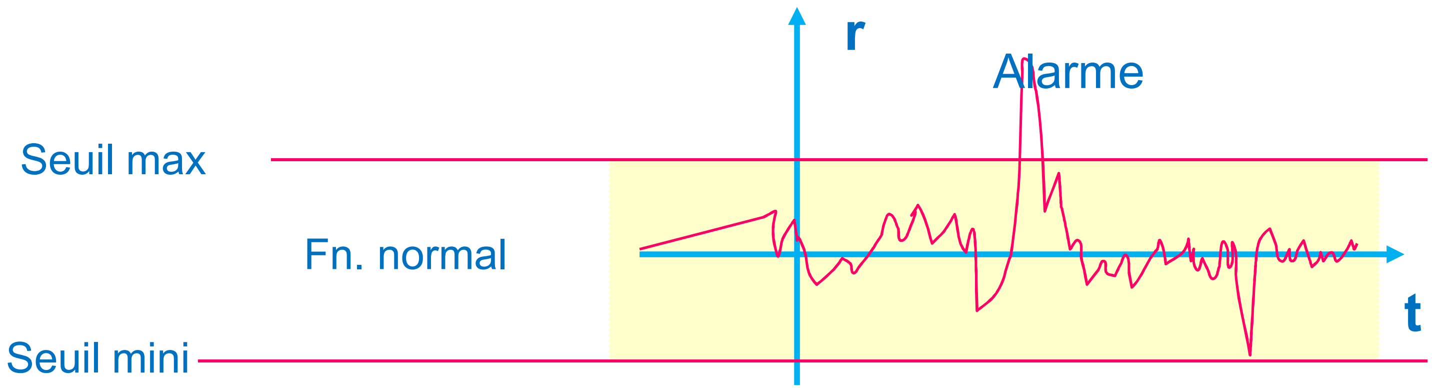
$$y_1 = x$$

$$y_2 = x$$

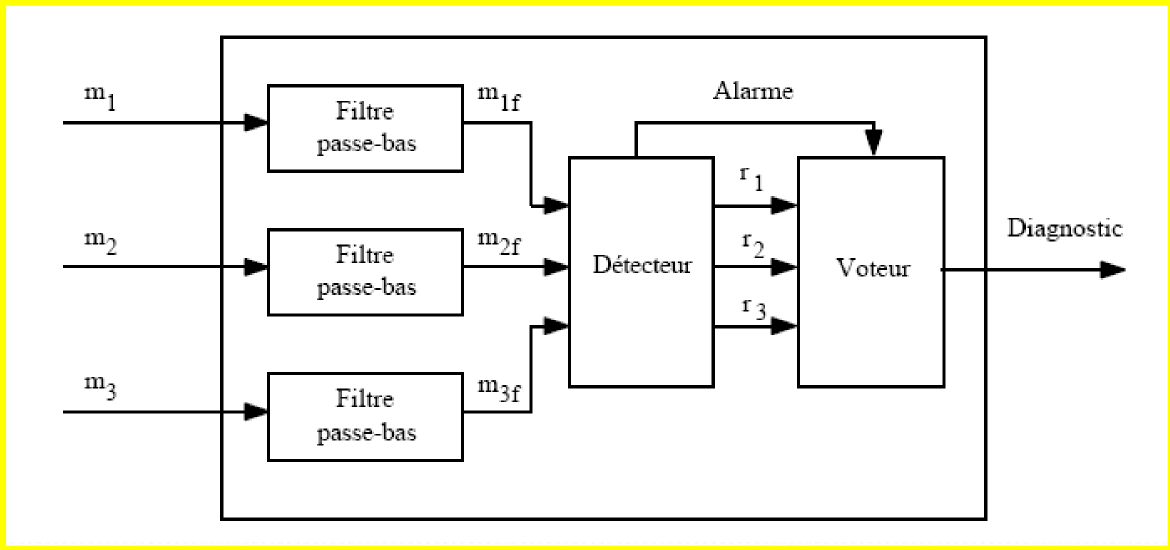
$\Rightarrow$ RRA statique : $y_1 - y_2 = 0$

Redondance Double



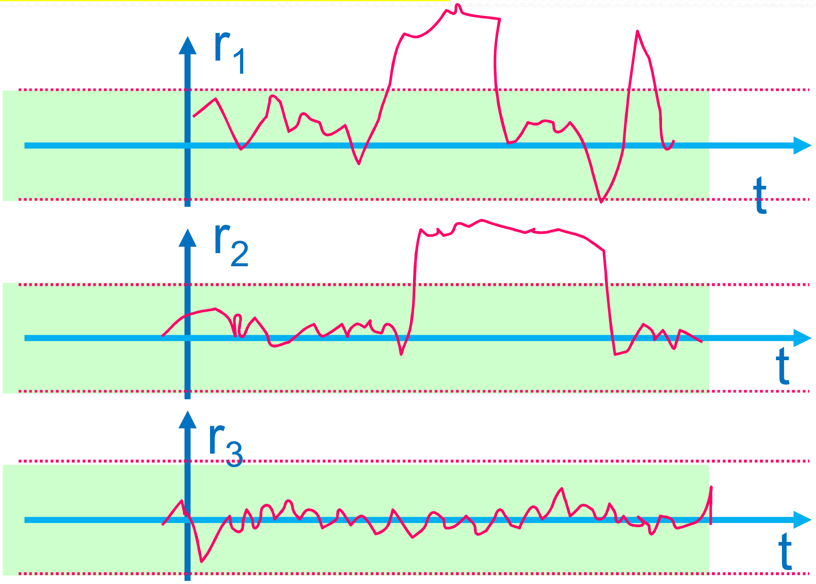


Redondance Triple



Résidus

$$r_1 = m_{1f} - m_{2f}$$
$$r_2 = m_{1f} - m_{3f}$$
$$r_3 = m_{2f} - m_{3f}$$



Quand le système est défectueux?

- Soit un système: $\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x,u,t,\theta) \\ y = C(x,\varepsilon) \end{cases}$

x : état

y : mesure

u : entrée

θ : paramètres

ε : bruit

- Le système fonctionne en régime normal signifie:
  - y est produit selon la loi C,
  - et x est produit conformément à la loi f,
  - et ε est produit selon la loi de probabilité P

- Le système fonctionne en mode de défaillance signifie:
  - y n'est pas produit conformément à la loi C, ou
  - x n'est pas produit conformément à la loi f, ou
  - ε n'est pas produit conformément à la loi de probabilité P

Comment isoler le défaut ?

Redondance triplée

$y_1 = x$

$y_2 = x$

$y_3 = x$

Deux résidus

$r_1 = y_1 - y_2 = 0$

$r_2 = y_2 - y_3 = 0$

Remarques

•**toute combinaison linéaire de résidus est un résidu ($r_3 = y_2 - y_3$)**

L'ensemble $\{r_1, r_2\}$ est une base résiduelle dans le sens suivant :

$$\begin{pmatrix} r1 \\ r2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \end{pmatrix}$$

Isolation de défaut

Redondance triplée

$$y_1 = x + f_1 \qquad x = y_1 - f_1$$
$$y_2 = x + f_2 \qquad x = y_2 - f_2$$
$$y_3 = x + f_3 \qquad x = y_3 - f_3$$

$$y_1 - f_1 = y_2 - f_2$$
$$y_2 - f_2 = y_3 - f_3$$

$$r_1 = y_1 - y_2 = f_1 - f_2$$
$$r_2 = y_2 - y_3 = f_2 - f_3$$

Forme de Calcul

Forme d'Evaluation

Isolation des défauts

$r_1 = y_1 - y_2 = f_1 - f_2$
$r_2 = y_2 - y_3 = f_2 - f_3$

→

	f_1	f_2	f_3
r_1	1	1	0
r_2	0	1	1

Résidus Structurés

En réponse à une défaillance donnée, certaines composantes (spécifiques à cette défaillance) du vecteur de résidus sont nulles.

En réponse à une défaillance donnée, le vecteur de résidus reste dans une direction spécifiée, propre à cette défaillance.

Résidus directionel

Conclusion sur la redondance matérielle

- détecte les défauts du capteur (si détectable)
- isole les défauts du capteur (si suffisamment de redondance)
- a besoin de modèles de bruit pour une décision statistique
- a besoin de modèles d'incertitude pour une décision basée sur la théorie des ensembles
- approche puissante mais multiplie le poids et les coûts
- limité aux défauts de capteurs

Redondance Analytique Statique

RRAs

- Définition
  - *Une RRA est une relation déduite du modèle mathématique du système à surveiller, entre des variables dont les valeurs numériques sont disponibles à partir de l'instrumentation (commande, consignes, mesures).*
    - Le modèle général peut s'écrire : $F(u,x,x_o, y, \Theta)$
    - L'évolution de x suit une trajectoire qui dépend de x_o et u
    - Les RRAs éliminent x pour obtenir : $g(u, y, \Theta)$

- Problématique : comment générer ces RRAs
  - Redondance statique
  - Redondance dynamique

Système linéaire

- *Etant donné*

$$x(t+1) = A\,x(t) + B\,u(t) + F_x\,d(t) + E_x\,\varepsilon(t)$$

$$y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) + F_y\,d(t) + E_y\,\varepsilon(t)$$

F : fautes,
E : incertitudes

$$x \in \Re^n, \quad y \in \Re^m$$

- Redondance statique
  - Soit m>n : Alors, il existe (en permutant éventuellement les lignes) une décomposition de *C* sous la forme

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$$

  - telle que C_1 est inversible et alors y(t) l'équation de mesure s'écrit :

- L'équation de mesure devient :

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} F_{y1} \\ F_{y2} \end{bmatrix} \delta(t) + \begin{bmatrix} E_{y1} \\ E_{y2} \end{bmatrix} \varepsilon(t)$$

- X est calculé alors à partir de y1,

$$x(t) = C_1^{-1}\left[y_1(t) - D_1 u(t) - F_{y_1}\delta(t) - E_{y_1}\varepsilon(t)\right]$$

  - et éliminé en le remplaçant dans Y2 : on obtient les RRAs en substituant *x* dans y2

$$y_2(t) - C_2 C_1^{-1} y_1(t) - (D_2 + C_1^{-1} D_1) u(t) - (F_{y_2} + C_1^{-1} F_{y_1})\delta(t)$$
$$-(E_{y_2} + C_1^{-1} E_{y_1})\varepsilon(t) = 0$$

- Forme de calcul et d'évaluation du résidu

$$\mathrm{y}_2(t)-C_2C_1^{-1}\mathrm{y}_1(t)-(D_2+C_1^{-1}D_1)\mathrm{u}(t)-(F_{y_2}+C_1^{-1}F_{y_1})\delta(t)$$
$$-(E_{y_2}+C_1^{-1}E_{y1})\varepsilon(t)=0$$

$$\rho(t)=\mathrm{y}_2(t)-C_2C_1^{-1}\mathrm{y}_1(t)-(D_2+C_1^{-1}D_1)\mathrm{u}(t)=$$
$$(F_{y_2}+C_1^{-1}F_{y_1})\delta(t)+(E_{y_2}+C_1^{-1}E_{y_1})\varepsilon(t)$$

- Une autre approche pour éliminer l'inconnu *x* consiste à trouver une matrice W orthogonale à C/ (WC=0) . En multipliant l'équation de mesure à gauche par W :

$$Wy(t) \;=\; WCx(t) \;+ WD\,u(t)$$
$$+\;WFy\,d(t)\;+\;WEy\,\varepsilon(t)=\;WD\,u(t)\;+\;WFy\,d(t)\;+\;WEy\,\varepsilon W(t)$$

- Dans ces conditions :
  - 1. le système de l’équation de mesure est sur-déterminé par rapport à x :
  - on a m – n relations de redondance analytique, car la matrice W possède m – n lignes linéairement indépendantes (formant une base du noyau de C).

Redondance physique

- Exemple : redondance triple

$$\left.\begin{array}{ll} y_1 = x + f_1 & x = y_1 - f_1 \\ y_2 = x + f_2 & x = y_2 - f_2 \\ y_3 = x + f_3 & x = y_3 - f_3 \end{array}\right\}$$

$$\mathbf{y_1 - f_1 = y_2 - f_2}$$
$$\mathbf{y_2 - f_2 = y_3 - f_3}$$

$$\mathbf{r_1 = y_1 - y_2 = f_1 - f_2}$$
$$\mathbf{r_2 = y_2 - y_3 = f_2 - f_3}$$

Redondance Analytique (dynamique)

Modèle à espace d'état

Temps Continu

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Temps Discret

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Si il existe *W* telle que *WC = 0*
Alors les relations de redondances statiques peuvent être trouvées

Redondance Analytique Dynamique

(continu)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Dérivation de y

$$\dot{y}(t) = C\dot{x}(t) + D\dot{u}(t)$$

$$\dot{y}(t) = CAx(t) + CBu(t) + D\dot{u}(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$
$$\dot{y}(t) = CAx(t) + CBu(t) + D\dot{u}(t)$$

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} D & 0 \\ CB & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{pmatrix}$$

Redondance Analytique Dynamique (discret)

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Dérivation de y

$$y(t+1) = Cx(t+1) + Du(t+1)$$

$$y(t+1) = CAx(t) + CBu(t) + Du(t+1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$
$$y(t+1) = CAx(t) + CBu(t) + Du(t+1)$$

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ y(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} D & 0 \\ CB & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ u(t+1) \end{pmatrix}$$

Redondance Analytique Dynamique

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} D & 0 \\ CB & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{pmatrix}$$

Si il existe W vérifiant :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} W_1 & W_2 \end{pmatrix}}_{W} \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} = 0$$

alors

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} W_1 & W_2 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} D & 0 \\ CB & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \end{pmatrix} \right] = 0$$

Redondance Analytique (générale)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

Dérivation de y

$$\dot{y}(t) = CAx(t) + CBu(t) + D\dot{u}(t)$$

Dérivation de y’

$$\ddot{y}(t) = CA\dot{x}(t) + CB\dot{u}(t) + D\ddot{u}(t)$$

Dérivation de $y^{(n)}$

etc.

matrice d'Observabilité *OBS(A, C, p)*

T(A, B, C, D, p)

$$\begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dots \\ y^{(p)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{(p)} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ CA^{(p-1)}B & \dots & CB & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t) \\ \dots \\ u^{(p)}(t) \end{pmatrix}$$

Redondance Analytique (générale)

relations de Redondance en temps

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

$\xleftrightarrow{\text{Transformée de Laplace}}$

$$sX = AX + BU$$
$$Y = CX + DU$$

$$W\overline{y}^{(p)} - WT(A,B,C,D,p)\overline{u}^{(p)} = 0 \longleftrightarrow Y - \left(C(sI - A)^{-1}B + D\right)U = 0$$

$$QW\overline{y}^{(p)} - QWT(A,B,C,D,p)\overline{u}^{(p)} = 0$$

$$N(s)Y - N(s)\left(C(sI - A)^{-1}B + D\right)U = 0$$

$$N(s)Y - M(s)U = 0$$

Détection des défauts

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + F_x f$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + F_y f$$

$$W\overline{y}^{(p)} - WT(A,B,C,D,p)\overline{u}^{(p)} - WT(A,F_x,C,F_y,p)\bar{f}^{(p)} = 0$$

$$r = \underbrace{W\overline{y}^{(p)} - WT(A,B,C,D,p)\overline{u}^{(p)}}_{\text{Forme calculée}} = \underbrace{WT(A,F_x,C,F_y,p)\bar{f}^{(p)}}_{\text{Forme d'Evaluation}}$$

Forme calculée

Forme d'Evaluation

= 0 en absence de défaut

≠0 en présence de défaut

RESUME REDONDANCE DYNAMIQUE

- Etant donné le système

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \qquad (1)$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) \qquad (2)$$

- A l'instant K+1

$$y(k+1) = Cx(k+1) + Du(k+1) \qquad (3)$$

- En utilisant (1) on a

$$y(k+1) = CAx(k) + CBu(k) + Du(k+1)$$

- Alors:

$$\begin{pmatrix} y(k) \\ y(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} D & 0 \\ CB & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(k) \\ u(k+1) \end{pmatrix}$$

- En généralisant à l'ordre p

$$\begin{pmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ \dots \\ y(k+p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{(p)} \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} D & 0 & \dots & 0 \\ CB & D & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ CA^{(p-1)}B & \dots & CB & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ \dots \\ u(k+p) \end{pmatrix}$$

$$\bar{y}(k,p) = OBS(A,C,p)\,x(k) + T(A,B,C,D,p)\,\bar{u}(p,k)$$

- Conséquence du théorème de Cayley-Hamilton
  - Il existe p tel que le rang de OBS(A,C,p) soit inférieur au nombre de lignes donc on peut trouver une matrice W telle que :

$$W.OBS(A,C,p) = 0$$

  - *L'espace supplémentaire à OBS, défini par W, est appelé "espace de parité".*
  - En projetant l'équation (3) dans cet espace, on obtient :

$$W\bar{y}(k,p) - WT(A,B,C,D,p)\bar{u}(k,p) = 0$$

Cette relation est appelée : "relation de redondance analytique dynamique". Le résidu est :

$$r(k) = W\bar{y}(k,p) - WT(A,B,C,D,p)\bar{u}(k,p) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} rang(W) = m(p+1) - rang(T) \\ \dim(W) = (rang(W), m(p+1)) \end{array}}$$

Application numérique

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(K) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \quad A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 2 & 0.5 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I, \; y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{y}(k,p) = OBS(A,C,p).x(k) + T(A,B,C,D,p).\bar{u}(p,k)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{y}(k) \\ \bar{y}(k+1) \\ \bar{y}(k+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & 0 & 0 \\ CB & D & 0 \\ CAB & CB & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ u(k+2) \end{bmatrix}$$

Dérivée jusqu'à l'ordre deux

Calcul de W : dérivée ordre 1 : $\bar{y}(k,1) = OBS(A,C,1).x(k) + T_1(A,B,C,D,1).\bar{u}(1,k)$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 1,2 & 0.25 \end{bmatrix}, \; OBS_1 = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0.1 & 0 \\ 2 & 0.5 \end{bmatrix} \; T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

D

D

CB

$$\boxed{\begin{aligned} & rang(W) = m(p+1) - rang(T_1) = 2*(1+1) - 2 = 2 \\ & \dim(W) = (rang(W), m(p+1)) = (2,4) \end{aligned}}$$

$\boxed{W.OBS_1(.) = 0 \Rightarrow}$

$$W.OBS_1(.) = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0.1 & 0 \\ 2 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Trouvons alors 2 vecteurs W linéairement indépendants

$$\begin{cases} a + 0.1c + 2d = 0 \\ b + 0.5d = 0 \end{cases} \Rightarrow 2 \text{ équations } 4 \text{ inconnues}$$

On fixe arbitrairement 2 inconnues

$$a = 0, et\ d = -1 \Rightarrow b = -0.5d,\ c = -20d \Rightarrow W_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 20 & -1 \end{bmatrix}$$

$$b = 0, et\ d = 0 \Rightarrow,\ a = -0.1c \Rightarrow W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c = 0 \text{ et } d = -2 \Rightarrow W_3 = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

W3 est une combinaison linéaire de W1 et W2

$$\boxed{W_3 = 0.5W_2 - 2W_1}$$

$$\boxed{W = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix}}$$

Expressions des résidus

$$r(k) = W\bar{y}(k, p) - WT(A, B, C, D, p)\bar{u}(k, p$$

$$r(k) = W\bar{y}(k,1) - WT_1(A,B,C,D,1)\bar{u}(k,1)$$

$$r(k) = \begin{bmatrix} r_1(k) \\ r_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ y_1(k+1) \\ y_2(k+1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & -10 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \end{bmatrix}$$

$$r_1(k) = y_1(k) - 10y_1(k+1) + 10u(k) \Rightarrow r_1(z) = z^{-1}y_1 - 10y_1 + 10z^{-1}u$$

$$r_2(k) = 4y_1(k) + y_2(k) - 2y_2(k+1) \Rightarrow r_2(z) = 4z^{-1}y_1 + z^{-1}y_2 - 2y_2$$

Si r=0, on retrouve le modèle initial

$$\boxed{\begin{matrix} \begin{cases} zx_1 = 0.1x_1 + u \\ zx_2 = 2x_1 + 0.5x_2 \end{cases} & \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_2 \end{cases} \\ \multicolumn{2}{l}{\Rightarrow y_1 = \dfrac{u}{z-0.1},\ y_2 = \dfrac{2}{z-0.5}y_1} \end{matrix}}$$

Résidus d'ordre 2

- Les matrices OBS et T seront :

$$OBS_2 = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CAB \end{bmatrix} \quad T_2 = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 \\ CB & D & 0 \\ CAB & CB & 0 \end{bmatrix}$$

$$rang(W) = m(p+1) - rang(T_2) = 2*(2+1) - 2 = 4$$
$$\dim(W) = (rang(W), m(p+1)) = (4,6)$$

- On obtient après calcul

Résidu d'ordre 2

$$r_1 = z^{-1} y_1 - 10 y_1 + 10 z^{-1} u(z)$$
$$r_2 = 4 z^{-2} y_1 + z^{-2} y_2 - 2 z^{-1} y_2$$
$$r_3 = z^{-2} y_1 - 10 z^{-1} y_1 + 10 z^{-2} u(z)$$
$$r_4 = z^{-2} y_2 - 12 z^{-1} y_2 + 20 y_2 + 40 z^{-2} u$$

Résidu d'ordre 1 obtenu avant

$$r_1(z) = z^{-1} y_1 - 10 y_1 + 10 z^{-1} u$$
$$r_2(z) = 4 z^{-1} y_1 + z^{-1} y_2 - 2 y_2$$

- Analyse
  - A l'ordre deux on obtient des résidus sensibles uniquement à Y2
  - Si on augmente l'ordre, on obtient les mêmes RRAs décalées dans le temps (filtrées)

Conclusions

- Détecte n'importe quel défaut
- Isole (localise) n'importe quel défaut (si il y'a de la redondance)