# Théorie de l'Elasticité

Abdellatif MEGNOUNIF

## Application

# Cercles de Mohr

**COURS 7** Mardi 14.04.2020

# Introduction

**Le but de cette application est de montrer comment tracer les 03 cercles de Mohr dans le cas d’un tenseur de contraintes à 3D. On l’appelle le tricercle de Mohr.**

**On essayera en parallèle de revoir comment calculer les contraintes et directions principales d’un tenseur.**

# Exemple

**En un point quelconque d'un milieu élastique, le tenseur des contraintes est donné par ce qui suit:**

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

**i) Décomposer ce tenseur en partie sphérique et partie déviatorique. Que peut représenter la partie déviatorique.**

**ii) Déterminer les contraintes et directions principales du tenseur déviatorique. En déduire les contraintes et directions principales du tenseur initial.**

**iii) Calculer la valeur de la contrainte de cisaillement maximale.**

**iv) Tracer le tricercle de Mohr de l'état de contrainte en un point quelconque. Représenter sur le tricercle le vecteur contrainte au point appartenant à la facette dont la normale est la bissectrice du plan (x,z) positif.**

# Solution

**i) Partie sphérique et partie déviatorique.**

$$[\sigma] = [\sigma]_s + [\sigma]_D$$

**Partie Sphérique**

$$[\sigma]_s = \begin{pmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{pmatrix}$$ **et** $$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{I_1}{3} = 3$$

$$[\sigma]_s = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

# Solution

## Partie Déviatorique

$$[\sigma]_D = [\sigma] - [\sigma]_s$$

$$[\sigma]_D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**On peur décomposer $[\sigma]_D$ en 02 tenseurs**

$$[\sigma]_D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Cisaillement Plan « x,y »**

**Cisaillement Plan « x,z »**

**$[\sigma]_D$ est la superposition de deux cisaillements**

# Solution

**ii) Contraintes et directions principales du tenseur déviatorique.**

**Il faut résoudre le système**

$$([\sigma]_D - \sigma_d.[I])\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = 0$$

**Solutions différentes de zéro si:**

$$det\,([\sigma]_D - \sigma_d.[I]) = \begin{vmatrix} -\sigma_d & 1 & 1 \\ 1 & -\sigma_d & 0 \\ 1 & 0 & -\sigma_d \end{vmatrix} = 0$$

**Soit**

$$(-\sigma_d)[(-\sigma_d).(-\sigma_d)] - 1.[1.(-\sigma_d)] + 1.[-1.(-\sigma_d)] = 0$$

**Soit**

$$\sigma_{d1} = -\sqrt{2}\ ; \sigma_{d2} = 0\ \ ; \sigma_{d3} = \sqrt{2}$$

## Solution

## Directions Principales

$$\left([\sigma]_D - \sigma_d.[I]\right)\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = 0$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \sigma_d \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right].\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Soit**

$$\left[\begin{pmatrix} -\sigma_d & 1 & 1 \\ 1 & -\sigma_d & 0 \\ 1 & 0 & -\sigma_d \end{pmatrix}\right].\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Solution

### Directions Principales

$$\left[\begin{pmatrix} -\sigma_d & 1 & 1 \\ 1 & -\sigma_d & 0 \\ 1 & 0 & -\sigma_d \end{pmatrix}\right] . \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Cas 1:** $\sigma_{d1} = -\sqrt{2}$

$$\left[\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\right] . \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}.l_1 + m_1 + n_1 = 0 \\ l_1 + \sqrt{2}.m_1 = 0 \\ l_1 + \sqrt{2}.n_1 = 0 \end{cases}$$

La 2ème et 3ème éqs nous donnent $m_1 = n_1$. et $l_1 = -\sqrt{2}.m_1 = -\sqrt{2}.n_1$

La 1ère équation est vérifiée

Or: $l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$; en remplaçant, on aura $2.m_1^2 + m_1^2 + m_1^2 = 1$

$$l_1 = \mp\frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad m_1 = \pm\frac{1}{2} \quad ; n_1 = \pm\frac{1}{2}$$

## Solution

### Directions Principales

**Cas 2:** $\sigma_{d2} = 0$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] . \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} m_2 + n_2 = 0 \\ 1.\, l_2 = 0 \\ 1.\, l_2 = 0 \end{cases}$$

La 1ère nous donne $m_2 = -n_2$. Et les autres $l_2 = 0$

Or: $l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1;$ en remplaçant, on aura $2.\, m_2^2 = 1$ soit $m_2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

En remplaçant, on aura

$$l_2 = 0 \quad ; \quad m_2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \;;\; n_2 = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$$

# Solution

## Directions Principales

**Cas 3:** $\sigma_{d3} = \sqrt{2}$

$$\left[\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{2}.\, l_3 + m_3 + n_3 = 0 \\ l_3 - \sqrt{2}.\, m_3 = 0 \\ l_3 - \sqrt{2}.\, n_3 = 0 \end{cases}$$

La 2ème et 3ème éqs nous donnent $m_3 = n_3$. et $l_3 = \sqrt{2}.\, m_3 = \sqrt{2}.\, n_3$

La 1ère équation est vérifiée

Or: $l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1$; en remplaçant, on aura $2.\, m_3^2 + m_3^2 + m_3^2 = 1$

$$l_3 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad m_3 = \pm\frac{1}{2} \quad ; n_3 = \pm\frac{1}{2}$$

# Solution

## Tenseur initial

**Les contraintes principales du tenseur initial sont égales aux contraintes principales du tenseur déviatorique augmentées de la contrainte moyenne.**

$$[\sigma] = [\sigma]_s + [\sigma]_D$$

$$\sigma_i = \sigma_{di} + \sigma_m$$

$$\sigma_1 = \sigma_{d1} + \sigma_m \;; \sigma_2 = \sigma_{d2} + \sigma_m \;; \sigma_3 = \sigma_{d3} + \sigma_m \;;$$

$$\sigma_1 = -\sqrt{2} + 3; \quad \sigma_2 = 3; \quad \sigma_3 = \sqrt{2} + 3$$

**Les directions principales du tenseur initial sont les mêmes directions principales du tenseur déviatorique**

$l_1 = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$

$m_1 = \pm\frac{1}{2}$

$n_1 = \pm\frac{1}{2}$

$l_2 = 0$

$m_2 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$n_2 = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$

$l_3 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

$m_3 = \pm\frac{1}{2}$

$n_3 = \pm\frac{1}{2}$

# Solution

**iii) Contrainte de cisaillement maximale.**

**avec**

$$\tau_1 = \pm\frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_2| = \pm\frac{1}{2}\left|-\sqrt{2} - 0\right| = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tau_2 = \pm\frac{1}{2}|\sigma_1 - \sigma_3| = \pm\frac{1}{2}\left|-\sqrt{2} - \sqrt{2}\right| = \mp\sqrt{2}$$

$$\tau_3 = \pm\frac{1}{2}|\sigma_2 - \sigma_3| = \pm\frac{1}{2}\left|0 - \sqrt{2}\right| = \mp\frac{\sqrt{2}}{2}$$

**Ainsi**

$$\boldsymbol{\tau_{max} = \sqrt{2}}$$

# Solution

## iv) Tricercle de Mohr.

**Le cercle de Mohr est défini dans le repère contrainte normale « $\sigma_n$ » et contrainte tangentielle « $\tau$ ».**

**Comme on a trois (03) plans dans l'espace, on va avoir trois (03) cercles de Mohr.**

**Il faut donc d'abord définir les expressions de « $\sigma_n$ » et « $\tau$ ».**

**On sait par définition, dans un repère principal que:**

**Sachant que les composantes d'une contrainte :**

$$\begin{cases} q_x = \sigma_1 . l \\ q_y = \sigma_2 . m \\ q_z = \sigma_3 . n \end{cases}$$

**On aura**

$$\sigma^2 = \sigma_n^2 + \tau^2 = \sigma_1^2 . l^2 + \sigma_2^2 . m^2 + \sigma_3^2 . n^2$$
$$\sigma_n^2 = \sigma_1 . l^2 + \sigma_2 . m^2 + \sigma_3 . n^2$$
$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

**On obtient 03 équations à 03 inconnues ($l^2$, $m^2$ et $n^2$) qu'on peut résoudre en les linéarisant.**

## Solution

**La résolution nous donne**

$$l^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_2).(\sigma_1 - \sigma_3)} > 0$$

$$m^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3).(\sigma_2 - \sigma_1)} < 0$$

$$n^2 = \frac{\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1).(\sigma_3 - \sigma_2)} > 0$$

**Sachant que $l^2$ , $m^2$ et $n^2$ doivent être positifs et que $\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$**

**On doit avoir**

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) > 0$$
$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1) < 0$$
$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) > 0$$

## Solution

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) > 0$$
$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1) < 0$$
$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) > 0$$

**Si on considère les variables de l'axe de repère « $\sigma_n$ » suivant l'axe « x » et «$\tau$ » suivant l'axe « y », on remarque que les 03 équations représentent des équations de cercles.**

**Considérons par exemple la 1ère équation. On a**

$$\tau^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) > 0$$

**Soit:**

$$\tau^2 + \sigma_n^2 - \sigma_n(\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_2 . \sigma_3 > 0$$

**Après réarrangement**

$$\tau^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 > \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

**Dans le repère $(\sigma_n, \tau)$ c'est l'équation d'un cercle de rayon $\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)$ et de centre $\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$**

## Solution

**Les 02 autres équations se calculent de la même manière et on aura 02 autres cercles:**

$$\tau^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 < \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

**et**

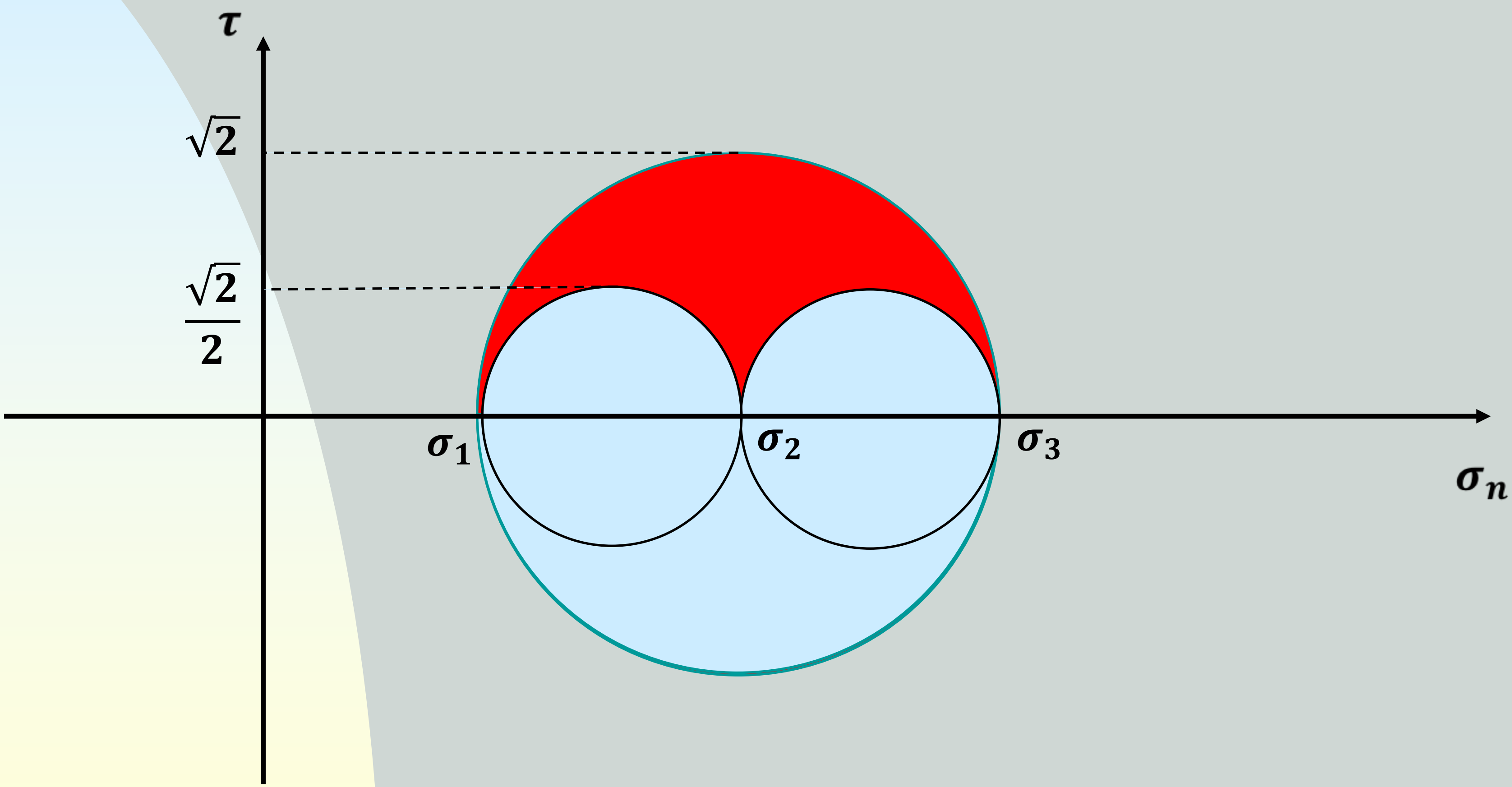
$$\tau^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 > \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2$$

**On peut maintenant tracer les 03 cercles dans un même repère $(\sigma_n, \tau)$ en respectant les inégalités des équations.**

## Solution

Soit, avec

$$\sigma_1 = -\sqrt{2} + 3; \quad \sigma_2 = 3; \quad \sigma_3 = \sqrt{2} + 3$$



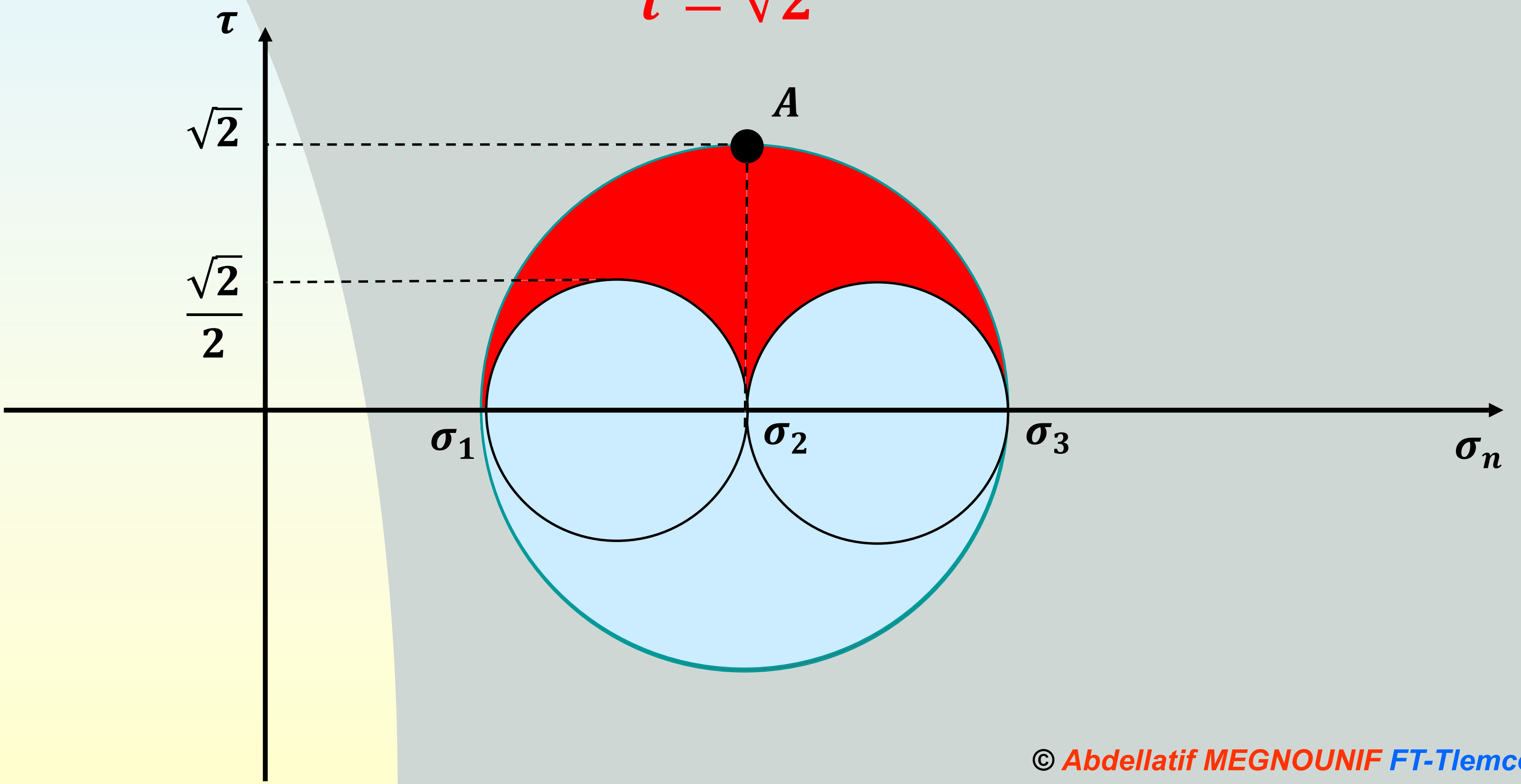
**Solution** **Vecteur contrainte dont la normale est la bissectrice du plan (x,z) positif.**

**Soit l=** $\frac{\sqrt{2}}{2}$; **m=0; n=** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**Or :** $\sigma_n = l^2.\sigma_1 + m^2.\sigma_2 + n^2.\sigma_3 = \frac{1}{2}(3-\sqrt{2}) + \frac{1}{2}(3+\sqrt{2}) = 3$

**et** $\tau^2 = \sigma^2 - \sigma_n^2 = l^2.\sigma_1^2 + m^2.\sigma_2^2 + n^2.\sigma_3^2 - \sigma_n^2 = \frac{1}{2}(3-\sqrt{2})^2 + \frac{1}{2}(3+\sqrt{2})^2 - 9 = 2$

$$\tau = \sqrt{2}$$



**Merci.** **Fin de l'Application**