Exercice 01 :

- Calcul du gain K

$$\varepsilon(k+1) = (A-KC)\varepsilon(k) \Rightarrow \begin{matrix}(A-KC)=0 \\ C = I \Rightarrow K = A\end{matrix}$$

- Calcul des résidus numériques

$$\hat{x}(k+1) = A\hat{x}(k) + Bu(k) + K(y-\hat{y})$$

$$\hat{x}(k+1) - A\hat{x}(k) + KC\hat{x}(k) = Bu(k) + Ky \xrightarrow{TZ} \hat{X}(z) = [zI-(A-KC)]^{-1}(BU(z)+KY(z))$$

$$\hat{Y}(z) = C\hat{X}(z) = C[zI-(A-KC)]^{-1}(BU(z)+KY(z))$$

$$R(z) = Y(z) - \hat{Y}(z) = Y(z) - C[zI-(A-KC)]^{-1}(BU(z)+KY(z))$$

Pour une réponse pile :

$$C = I, K = A \Rightarrow R(z) = (zI-A)Y(z) - BU(z)$$

- Application numérique :

$$\begin{pmatrix} R_1(z) \\ R_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (z-0.1) & 0 \\ -2 & (z-0.5) \end{pmatrix} . \left(\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} U(z) \right)$$

$$r_1(k) = y_1(k) - 0.1y_1(k) - u(k-1)$$
$$r_2(k) = y_2 - y_2(k-1) - 2y_1(k-1)$$

Exercice 02 :

- Détermination du gain de l'observateur

$$A_0 = (A-KC) = \begin{pmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix} \Rightarrow K = \begin{pmatrix} 0.05 & 0 \\ 2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

- Calcul des résidus

$$R(z) = Y(z) - \hat{Y}(z) = Y(z) - C[zI-(A-KC)]^{-1}(BU(z)+KY(z)) = Y(z) - I[zI-(A-A_0)]^{-1}(KY(z)+BU(z))$$

$$\begin{pmatrix} R_1(z) \\ R_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1(z) \\ Y_2(z) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left[zI - \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 2 & 0.4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.05 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{pmatrix} \right]^{-1} . \left[\begin{pmatrix} 0.01 & 0 \\ 2 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} U(z) \right]$$

D'où :

$$R_1(z) = \frac{1}{(z-0.05)}\left[(z-0.1)Y_1\ (z) - U(z)\right]$$

$$R_2(z) = \frac{1}{(z-0.1)}\left[-2Y\ (z) + (z-0.5)Y_2(z)\right]$$

<u>Exercice 03</u> :

L'équation caractéristique s'écrit :

$$EC = (p+20)^2 = \det\left(pI - (A-KC)\right) = \begin{pmatrix} p+10+k_1 & 1 \\ -2 & p+1+k_2 \end{pmatrix}$$

On choisit alors :

$k_1 = 10 + \sqrt{2}$

$k_2 = 19 - \sqrt{2}$

L'observateur s'écrit :

$$\dot{\hat{x}} = \begin{pmatrix} -20-\sqrt{2} & -1 \\ 2 & -20-\sqrt{2} \end{pmatrix}\hat{x} + \begin{pmatrix} 10 & 10+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 19-\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\hat{x}$$

La matrice de transfert entre le vecteur des résidus et l'erreur ε_y s'écrit alors :

$\varepsilon_y(p) = G_d(p)D(p)$

$W = 0$ pas d'entrées inconnues.

$$\begin{cases} \varepsilon_y(p) = G_d D(p) + G_w W \\ G_d(p) = C\left(pI - (A-KC)\right)^{-1}(D_a - KD_c) + D_c \\ G_w(p) = C\left(pI - (A-KC)\right)^{-1} F \end{cases}$$

Relation du cours :

$$\widetilde{Y}(p) = \left(I - C\left(pI - A + KC\right)^{-1}K\right)\ D_{fc}D_c(p)$$

De façon équivalente :

$$\widetilde{Y}(p) = \left(I - C\left(pI - A\right)^{-1}K\right)^{-1} D_{fc}D_c(p)$$

$$\varepsilon_y(p) = \frac{1}{p^2 + 40p + 400}\begin{pmatrix} p^2 + \left(30-\sqrt{2}\right)p + 202 - 10\sqrt{2} & -19+\sqrt{2} \\ 20 - 2\sqrt{2} & p^2 + \left(21+\sqrt{2}\right)p + 22 + \sqrt{2} \end{pmatrix} D(p)$$

La table de signature associée à cette matrice s'écrit :

	d_1	d_2
ε_{y1}	1	1
ε_{y2}	1	1

Les erreurs sont sensibles aux défauts mais la structure obtenue n'est pas localisante (signature identique des défauts).

On cherche alors une matrice $Q(p)$ telle que $Q(p)G_d(p)$ soit diagonale. Dans cet exercice $G_d(p)$ est inversible et son inverse est stable et propre, on peut prendre :

$$Q(p) = G_d^{-1}(p)$$

$$R(p) = Q(p)\varepsilon_y(p) = G_d^{-1}G_d(p)D(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_{c1} \\ d_{c2} \end{pmatrix}$$

La table de signature associée à cette matrice s'écrit :

	d_1	d_2
R_{y1}	1	0
R_{y2}	0	1

<u>Exercice 06</u> :

Le rang de (CF) étant égal au nombre d'entrées inconnues(1) à découpler,

$$(CF) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(rangCF) = 1$ égal au nombre d'entrées inconnues.

Il est possible de construire un générateur de résidus sensible aux défauts et insensible à la perturbation.

$$E = -F(CF)^{-} = -F\left[(CF)^T(CF)\right]^{-1}(CF)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P = I + EC = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G = PB = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En choisissant :

$$N = diag\begin{pmatrix} -5 & -6 & -7 \end{pmatrix}$$

Calculons le gain de l'observateur :

$$KC = PA - NP \rightarrow K = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 100 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le reconstructeur s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Nz(t) + Gu(t) + Ky(t) \\ \hat{x}(t) = z(t) - Ey(t) \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} z(t) + \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 100 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ \hat{x}(t) = z(t) - Ey(t) \end{cases}$$

On calcul à présent la matrice de transfert :

$$\mathrm{H} = (NE + K)D_c - PD_a = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{H}' = -ED_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le vecteur résidu s'écrit alors :

$$R(p) = Q(p)G_d(p)D(p) = Q(p)\begin{pmatrix} -\frac{1}{p+5} & -\frac{1}{p+5} & 0 \\ 0 & -\frac{P+10}{P+6} & -\frac{1}{P+6} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

La dernière ligne n'est d'aucune utilité, elle résulte du découplage de la perturbation, restent les défauts, on prend alors :

$$Q(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On obtient :

$$R(p)=\begin{pmatrix} R_1(p) \\ R_2(p) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{p+5} & -\dfrac{1}{p+5} & 0 \\ 0 & -\dfrac{p+10}{p+6} & -\dfrac{1}{p+6} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

La table de signature des défauts :

	d_1	d_2	d_3
R_1	1	1	0
R_2	0	1	1