

UNIVERSITE D'ABOU BEKR BELKAID - TLEMCEM  
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR  
DEPARTEMENT SCIENCES ET TECHNIQUES

***Cours de Mécanique Rationnelle  
Physique4***

***Khouane MEFTAH  
Enseignant à la Faculté***

## **TABLE DES MATIERES**

### **CHAPITRE 0 :       *Rappel***

- 1- *Position d'un point dans l'espace*
- 2- *Produit scalaire de deux vecteurs*
- 3- *Produit vectoriel de deux vecteurs*
- 4- *Moment d'une force*
- 5- *Angle de rotation, vitesse et accélération angulaires*

### **CHAPITRE 1 :       *Statique par les torseurs***

- 1- *Système des forces statiquement équivalents*
- 2- *Définitions et notations*
- 3- *Ecriture d'un torseur en différents points*
- 4- *Opération sur les torseurs*
- 5- *Torseurs particuliers*
- 6- *Propriétés des torseurs dans le cas particuliers*
- 7- *Principe fondamental de la statique*

### **CHAPITRE 2 :       *Cinématique***

- 1- *Dérivée par rapport au temps d'un vecteur dans différents repères*
- 2- *Relation entre les vitesses des points d'un solide*
- 3- *Glissement - roulement - pivotement*
- 4- *Torseur cinématique*
- 5- *Relation entre les accélérations des points d'un solide*
- 6- *composition de mouvement*
- 7- *Paramétrage utilisé dans l'espace (Angles d'Euler)*

### **CHAPITRE 3:           Cinétique**

- 1- *Système à masse conservative*
- 2- *Centre de gravité ou centre de masse*
- 3- *Moment d'inertie - Matrice d'inertie*
- 4- *Quantités de mouvement*
- 5- *Moment cinétique - Torseur cinétique*
- 6- *Principe fondamental de la dynamique*
- 7- *Energie cinétique*
- 8- *Théorèmes sur l'énergie*
  - *Travail*
  - *Notion de puissance*
  - *Energie potentielle*
  - *Théorème de l'énergie cinétique*
- 9- *Equilibrage des solides en rotation*

### **CHAPITRE 4 :           Principe des travaux virtuels Equations de LAGRANGE**

- 1- *Principe des travaux virtuels*
  - a- *Déplacement virtuel*
  - b- *Liaisons imposées au système*
  - c- *Travail virtuel*
  - d- *Principe du travail virtuel*
    - *Cas des liaisons parfaites*
    - *Cas d'un système en équilibre*
- 2- *Equations de LAGRANGE*
  - a- *Equations de LAGRANGE pour un système à paramètres indépendants*
  - b- *Les paramètres ne sont pas indépendants mais liés par des relations des liaisons holonomes ou non holonomes*

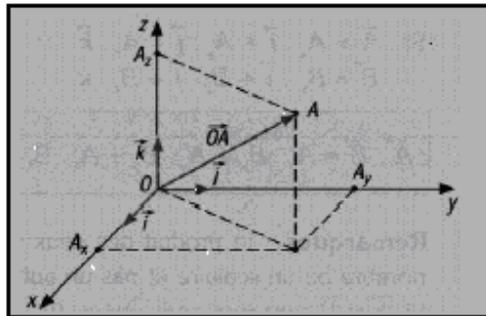
# RAPPEL

## 1- Position d'un point dans l'espace

$$\vec{OA} \begin{cases} X_A = OA_x \\ Y_A = OA_y \\ Z_A = OA_z \end{cases}$$

$$\vec{OA} = X_A \cdot \vec{i} + Y_A \cdot \vec{j} + Z_A \cdot \vec{k}$$

**Remarque** : dans un plan (x, y),  
 $\vec{k} = \vec{0}$  donne  $\vec{OA} = X_A \cdot \vec{i} + Y_A \cdot \vec{j}$



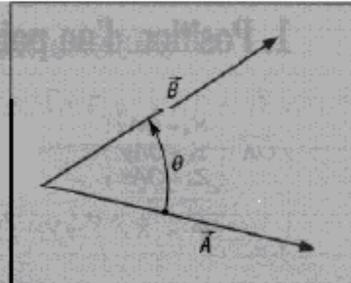
## 2- Produit scalaire de deux vecteurs

Le produit scalaire du vecteur  $\vec{A}$  par le vecteur  $\vec{B}$  noté  $\vec{A} \cdot \vec{B}$ , est égal au produit des modules des deux vecteurs multiplié par le cosinus de l'angle  $\theta$  entre leurs directions respectives.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos \theta = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \cos \theta = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

$$\text{Si : } \begin{cases} \vec{A} = A_x \cdot \vec{i} + A_y \cdot \vec{j} + A_z \cdot \vec{k} \\ \vec{B} = B_x \cdot \vec{i} + B_y \cdot \vec{j} + B_z \cdot \vec{k} \end{cases}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x \cdot B_x + A_y \cdot B_y + A_z \cdot B_z$$



**Remarques** : le produit des deux vecteurs est un nombre ou un scalaire et pas un autre vecteur.

Si  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  sont perpendiculaires ( $\theta = 90^\circ$ ) alors  $\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos 90^\circ = 0$ .

## Propriétés

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

$$k(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (k\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (k\vec{B}) = k\vec{A} \cdot \vec{B} \quad (k \text{ étant un scalaire})$$

### Remarques

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = 1 ; \vec{j} \cdot \vec{j} = 1 ; \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 ; \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 ; \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 ; \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

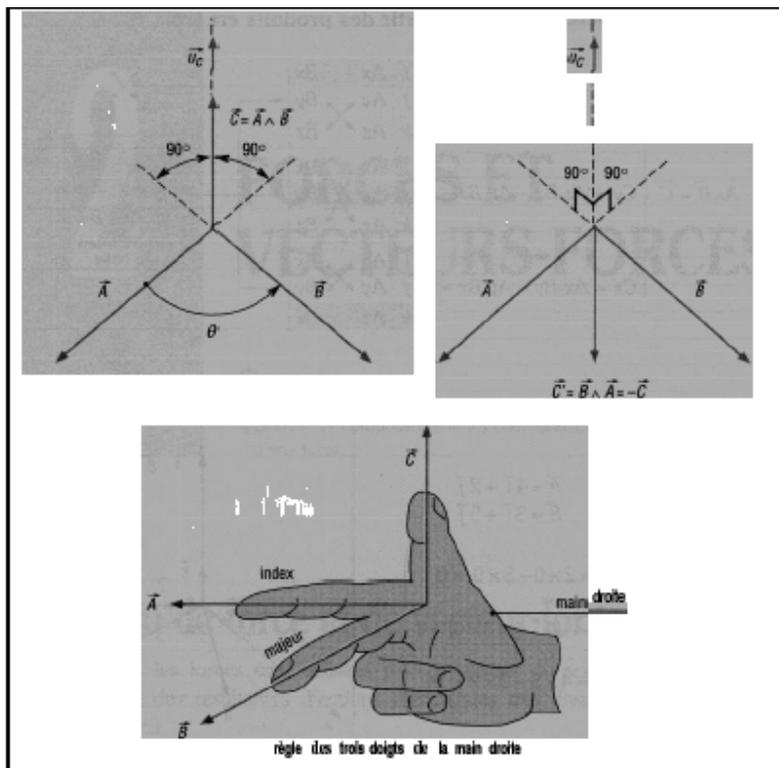
$$\theta = \arccos \left( \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A \cdot B} \right)$$

## 3- Produit vectoriel de deux vecteurs

### a- Définition

Le produit vectoriel du vecteur  $\vec{A}$  par le vecteur  $\vec{B}$ , noté  $\vec{A} \wedge \vec{B}$ , est un vecteur  $\vec{C}$  perpendiculaire au plan  $(\vec{A}, \vec{B})$  et tel que :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{C} = A \cdot B \sin \theta \vec{u}_C \quad \text{avec} \quad \|\vec{C}\| = A \cdot B \sin \theta \text{ et } \|\vec{u}_C\| = 1$$





#### d- Formule du double produit vectoriel

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

#### 4- Moment d'une force

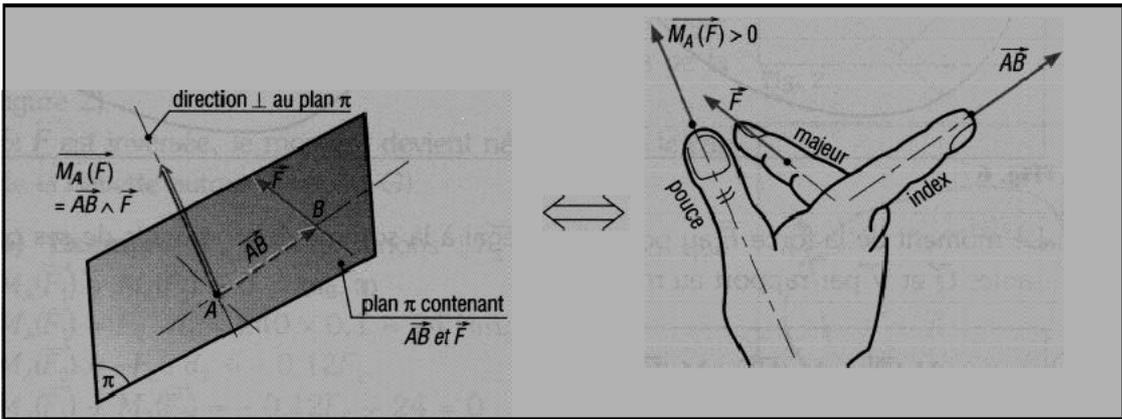
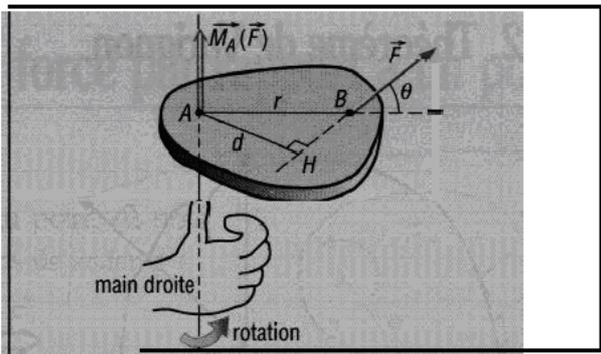
Soit un point  $B$  quelconque, appartenant à la direction de la force  $F$ . Le moment en  $A$  de  $F$  est défini par le vecteur :

$$\vec{M}_A(F) = \vec{AB} \wedge \vec{F}$$

$\vec{M}_A(F)$  est un vecteur à la fois perpendiculaire à  $F$  et à  $AB$ .

**Remarque :**  $\vec{AB}$ ,  $F$  et  $\vec{M}_A(F)$  suivent la règle des trois doigts  
Le produit vectoriel n'est pas commutatif :

$$\vec{AB} \wedge \vec{F} = - \vec{F} \wedge \vec{AB}$$

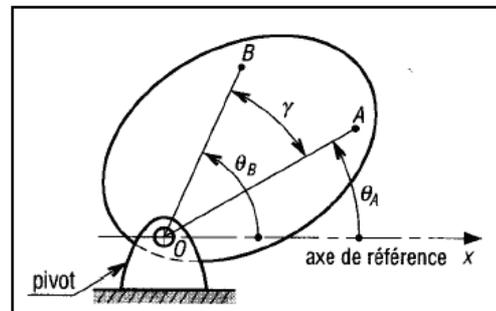


quelconque

## 5- Angle de rotation, vitesse et accélérations angulaires

### a- Angle de rotation

La rotation d'un solide est définie par son mouvement angulaire. Pour un solide en rotation plane (rotation d'axe 0), il suffit de mesurer l'angle de rotation  $\theta$  d'une droite quelconque ( $OA$ ,  $OB$ , etc.) appartenant au solide pour repérer la rotation de celui-ci.



$$\theta_B = \theta_A + \gamma$$

### Remarque

1 tour =  $2\pi$  radian =  $360^\circ$  (1 rad =  $57,296^\circ$ ).

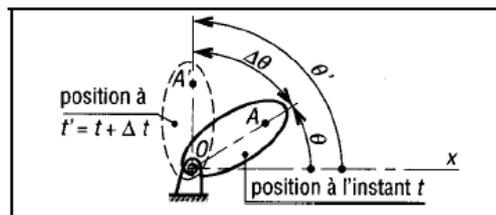
Il n'est pas nécessaire d'avoir un axe de rotation fixe pour avoir un mouvement de rotation.

### b- Vitesse angulaire ou vitesse de rotation $\omega$

La démarche est la même que pour les translations rectilignes.

#### Vitesse angulaire moyenne

$$\omega_{\text{moy}} = \frac{\theta' - \theta}{t' - t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$



#### Vitesse angulaire instantanée

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \right) = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

unités :  $\text{rad.s}^{-1}$

### c- Accélération angulaire $a$

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \right) = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}$$

ou

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} \quad \text{unités : } \text{rad.s}^{-2}$$

Remarque :

$$\omega d\omega = \alpha d\theta \quad \text{ou} \quad \dot{\theta} d\dot{\theta} = \ddot{\theta} d\theta$$

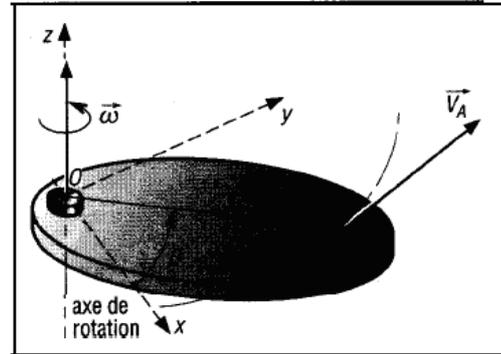
**d- Vecteur-rotation  $\vec{\omega}$**

L'axe de rotation (0, z) est perpendiculaire au plan du mouvement de rotation (0, x, y).

La vitesse angulaire  $\omega$  est définie par le vecteur-rotation  $\vec{\omega}$  porté par l'axe de rotation et tel que :

$$\vec{V}_A = \vec{\omega} \wedge \vec{OA}$$

**Remarque** : si la rotation se fait de x vers y,  $\vec{\omega}$  est positif et est orientée vers les z positifs.



# STATIQUE PAR LES TORSEURS

## OBJECTIFS

- Définir la notion de systèmes statiquement équivalents et la notion de torseurs d'actions mécaniques.
- Donner la méthode permettant d'écrire un torseur en différents points.
- Décrire les opérations sur les torseurs, les propriétés principales et les torseurs particuliers : glisseur, torseur-couple et torseur-nul.
- Donner un nouvel énoncé au principe fondamental de la statique.

Les torseurs sont des outils de modélisation analogues aux vecteurs, utilisés pour représenter des actions mécaniques, des vitesses et diverses autres grandeurs. Dans ce chapitre, nous nous limiterons à l'étude des torseurs d'actions mécaniques (ou système force-couple), les propriétés abordées pourront être généralisées aux autres torseurs.

## I - Systèmes de forces statiquement équivalents

Cette notion est particulièrement utile pour comprendre les torseurs.

### 1. Définition

Deux systèmes de forces sont statiquement équivalents s'ils ont même somme vectorielle et même moment résultant en **tout** point.

**Propriété** : dans tout problème de statique, un système de forces pourra toujours être remplacé par un autre système de forces qui lui est statiquement équivalent : les systèmes sont interchangeables. Autrement dit, l'utilisation de l'un ou l'autre système ne modifie ni les équilibres, ni les mouvements, ni les résultats obtenus.

## 2. Exemples

**Exemple 1 :** une force  $\vec{F}$  appliquée en un point  $O$  et ses composantes au même point sont des systèmes statiquement équivalents.

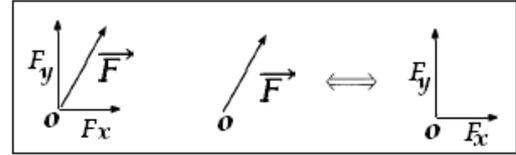


Fig. 1

**Remarque :** inversement, la résultante de deux forces est statiquement équivalente à celles-ci.

**Exemple 2 :** un couple  $C$  est statiquement équivalent à deux forces  $\vec{F}$  et  $-\vec{F}$  égales et opposées, distantes de  $d$  ( $C = Fd$ ). Une infinité de solutions sont possibles.

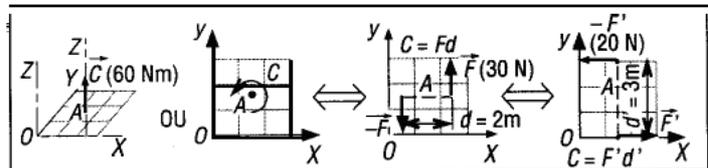


Fig. 2

**Exemple 3 :** une force  $\vec{F}$  peut être remplacée en n'importe quel point  $A$  par un système force ( $\vec{F}$ ) plus couple ( $M_A$ ) qui lui est statiquement équivalent.

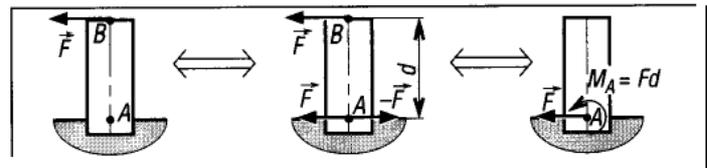


Fig. 3

**Exemple 4 :** tout système de  $n$  forces ( $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ ) dans l'espace est statiquement équivalent (autrement dit peut se réduire) en tout point  $A$  à un système force ( $\vec{S}$ ) plus couple ( $\vec{M}_A$ ) tel que :  $\vec{S} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$  et  $\vec{M}_A = \vec{M}_A(\vec{F}_1) + \vec{M}_A(\vec{F}_2) + \dots + \vec{M}_A(\vec{F}_n)$ .

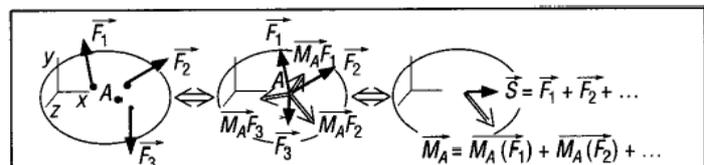


Fig. 4

**Remarque :** il suffit de répéter  $n$  fois le raisonnement de l'exemple 3, puis de faire les sommes vectorielles respectives.

## II - Définitions et notations

Défini en un point donné (A), un torseur d'action mécanique est un système force-couple constitué de deux grandeurs :

- a) une force ou somme vectorielle  $\vec{S}$ , indépendante du point choisi.
- b) un couple ou moment résultant  $\vec{M}_A$ , fonction du point A choisi.

**Notation :**  $\left\{ \begin{array}{c} \text{torseur} \\ \text{en A} \end{array} \right\} = {}_A\{T_A\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{S} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{cc} X & L_A \\ Y & M_A \\ Z & N_A \end{array} \right\}_{(x,y,z)}$  ou  $\{T_A\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{S} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}_A$

**Remarque 1 :** dans le repère (x, y, z),  $\vec{S}$  et  $\vec{M}_A$  s'écrivent :

$$\vec{S} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} \text{ et } \vec{M}_A = L_A\vec{i} + M_A\vec{j} + N_A\vec{k}$$

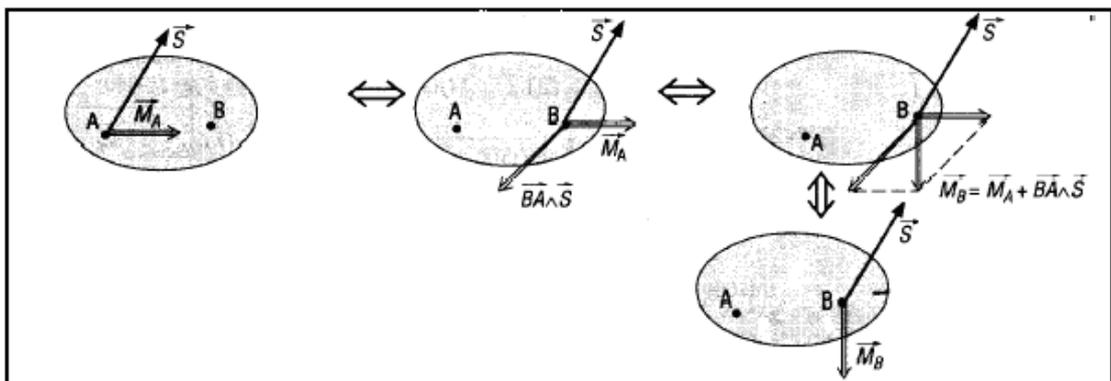
S'il n'y a pas d'ambiguïtés, l'indication du repère (x, y, z) peut être omise de l'écriture.

**Remarque 2 :**  $\vec{S}$  et  $\vec{M}_A$  sont appelés les éléments de réduction du torseur.  $\vec{S}$  encore notée  $\vec{R}$  est aussi appelée résultante générale du torseur

## III - Écriture d'un torseur en différents points

Un torseur (T) étant connu en un point A, déterminons sa valeur en un point B.

**Principe**



- a) La somme vectorielle  $\vec{S}$  du torseur a même valeur en tout point, elle est invariable.
- b)  $\vec{M}_A$  étant connu, la valeur du moment en B,  $\vec{M}_B$ , est obtenue par la relation :

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{S} = \vec{M}_A + \vec{M}_B(\vec{S})$$

**Remarque 1** : de manière générale, si 0 est l'origine du repère de calcul (0, x, y, z), les coordonnées de A, B et  $\overrightarrow{BA}$  sont :

$$\overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \\ z_A - z_B \end{pmatrix}$$

Le moment  $\overrightarrow{M_B}$  est alors égal à :

$$\overrightarrow{M_B} \begin{pmatrix} L_B \\ M_B \\ N_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_A \\ M_A \\ N_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \\ z_A - z_B \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \overrightarrow{M_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{S}$$

et

$$\begin{aligned} L_B &= L_A + Z(y_A - y_B) - Y(z_A - z_B) \\ M_B &= M_A - Z(x_A - x_B) + X(z_A - z_B) \\ N_B &= N_A + Y(x_A - x_B) - X(y_A - y_B) \end{aligned}$$

**Remarque 2** : on notera que toutes les écritures sont statiquement équivalentes (l'écriture en A est statiquement équivalente à celle en B). De ce fait, on peut choisir n'importe quel point pour écrire le torseur des actions exercées. Les diverses écritures sont comparables aux différentes photos possibles d'un même individu.

## IV - Opérations sur les torseurs

### 1. Addition ou somme de torseurs

**Condition impérative** : la somme de  $n$  torseurs  $\{T_1\}, \{T_2\}, \dots, \{T_n\}$  n'est possible que si tous les torseurs de la somme sont écrits au même point.

$$\{T_1\} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{S_1} \\ \overrightarrow{M_{1A}} \end{pmatrix}_A ; \quad \{T_2\} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{S_2} \\ \overrightarrow{M_{2A}} \end{pmatrix}_A ; \quad \dots ; \quad \{T_n\} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{S_n} \\ \overrightarrow{M_{nA}} \end{pmatrix}_A$$

$$\{T\} = \{T_1\} + \{T_2\} + \dots + \{T_n\} = \begin{pmatrix} \overline{S} = \overline{S_1} + \overline{S_2} + \dots + \overline{S_n} \\ \overline{M_A} = \overline{M_{1A}} + \overline{M_{2A}} + \dots + \overline{M_{nA}} \end{pmatrix}_A$$

## 2. Multiplication par un scalaire

Si  $a$  est un scalaire (nombre) quelconque et  $\{T\}$  un torseur, le produit de  $a$  par  $\{T\}$  revient à ajouter  $k$  fois le torseur  $\{T\}$  avec lui-même.

$$a \cdot \{T\} = (a \cdot T) = a \cdot \left\{ \begin{array}{c} \vec{S} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} a \cdot \vec{S} \\ a \cdot \vec{M}_A \end{array} \right\}$$

## 3. Torseurs égaux

Deux torseurs  $\{T_1\}$  et  $\{T_2\}$  sont égaux s'ils ont même somme  $\vec{S}$  et même moment  $\vec{M}_A$  au point A, autrement dit s'ils ont les mêmes éléments de réduction en tout point.

$$\{T_1\} = \{T_2\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \vec{S}_1 \\ \vec{M}_{1A} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{S}_2 \\ \vec{M}_{2A} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \vec{S}_1 = \vec{S}_2 \\ \vec{M}_{1A} = \vec{M}_{2A} \end{array} \right\}$$

# V - Torseurs particuliers

## 1. Torseur nul

Cas où  $\vec{S}$  et  $\vec{M}_A$  sont nuls, exemple de notation :

$$\{0\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{0} \end{array} \right\} \text{ en tout point}$$

**Remarque** : le torseur est nul en tout point de l'espace.

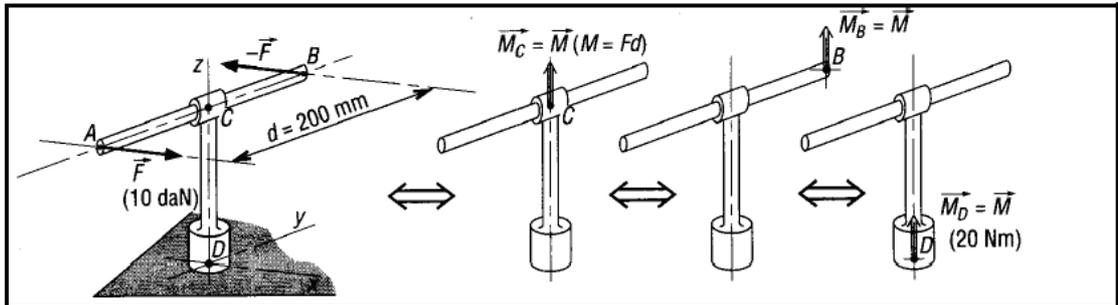
## 2. Torseur couple

Cas où  $\vec{S}$  est nulle et  $\vec{M}_A$  non nul :

$$\{C\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{M} \end{array} \right\} \text{ en tout point}$$

**Remarque** : la relation  $\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{S}$  donne, dans la mesure où  $\vec{S}$  est nulle :  $\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{0} = \vec{M}_A = \vec{M}$ . Autrement dit, le moment a même valeur  $\vec{M}$  en tout point et le torseur couple  $\{C\}$  a même écriture en tout point de l'espace.

### Exemple



L'ensemble des deux forces  $\vec{F}$  et  $(-\vec{F})$  est statiquement équivalent au couple  $\vec{M}_C = \vec{M}$  en C de module  $M = F \cdot d = 100 \times 0,2 = 20 \text{ Nm}$ . Le couple a même valeur en tout point de la clé  $\vec{M}_B = \vec{M}_D = \vec{M}_C = \vec{M}$ . Il en résulte que le couple de serrage exercé sur l'écrou en D est  $\vec{M}$  (20 Nm) d'axe z.

Le torseur couple s'écrit :  $\{C\} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{M} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ 20\vec{k} \end{Bmatrix}$  en tout point.

### 3. Glisseur

Cas où, en un point, le torseur se réduit à une somme  $\vec{S}$  non nulle et à un moment  $\vec{M}_A$

$$\text{nul : } \{G\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{S} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

À la ligne d'action de la force correspond l'axe du glisseur. Si A est un point de cette ligne, le moment en A du glisseur est nul ( $\vec{M}_A = \vec{0}$ ).

À la ligne d'action de la force correspond l'axe du glisseur. Si A est un point de cette ligne, le moment en A du glisseur est nul ( $\vec{M}_A = \vec{0}$ ).

En un point I éloigné de la direction de l'axe du glisseur, le moment  $\vec{M}_I$  n'est pas nul :

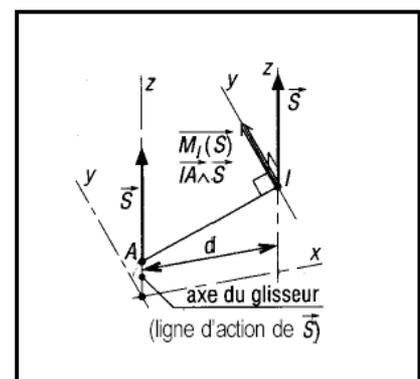
$$\vec{M}_I = \vec{M}_A + \vec{IA} \wedge \vec{S} = \vec{0} + \vec{IA} \wedge \vec{S}$$

$$\vec{M}_I = \text{moment en I de } \vec{S} \text{ en A} = \vec{IA} \wedge \vec{S}$$

$\vec{M}_I$  est perpendiculaire à  $\vec{IA}$  et à  $\vec{S}$ , il en résulte la propriété :

$$\vec{M}_I \cdot \vec{S} = 0$$

Le produit scalaire de  $\vec{M}_I$  par  $\vec{S}$  est toujours nul dans le cas d'un glisseur. Cette propriété, propre aux glisseurs, permet de les distinguer des autres torseurs.



### Évolution des écritures d'un même glisseur et propriétés

$$\vec{F} = 100\vec{k}$$

$$\{G\}_A = \{G\}_D = \begin{pmatrix} 100\vec{k} \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

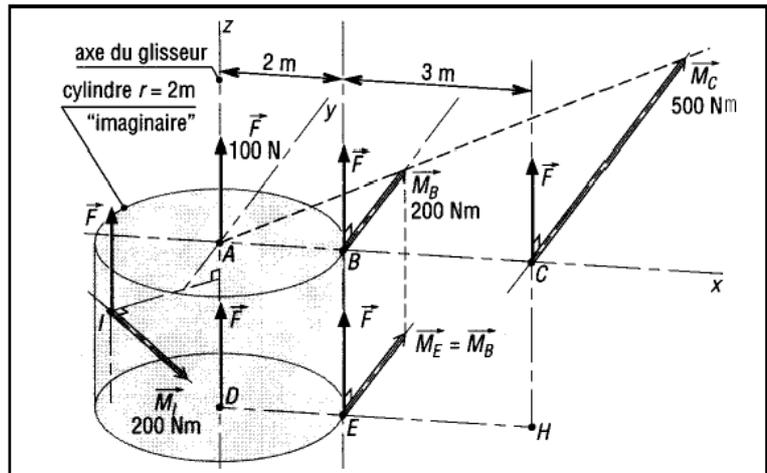
$$\{G\}_B = \{G\}_E = \begin{pmatrix} 100\vec{k} \\ 200\vec{j} \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{F} = 200\vec{j}$$

$$\{G\}_C = \{G\}_H = \begin{pmatrix} 100\vec{k} \\ 500\vec{j} \end{pmatrix}$$

Remarque :

$$\frac{M_B}{AB} = \frac{M_C}{AC} = \frac{200}{2} = 100$$



L'écriture du glisseur est la même pour tous les points (A, D, etc.) de son axe. L'écriture du glisseur est la même pour **tous les points** (B, E, etc.) appartenant à une droite parallèle à son axe ou à sa résultante ( $\vec{F} = \vec{S}$ ).

Tous les points (B, E, I, etc.) appartenant à la périphérie d'un cylindre d'axe l'axe du glisseur ont des moments de même module :  $M_B = M_E = M, = 200 \text{ Nm}$ .

## VI • Propriétés des torseurs dans le cas général

Dans le cas général,  $\vec{S} \neq \vec{0}$  ;  $\vec{M}_A \neq \vec{0}$  et  $\vec{M}_A \cdot \vec{S} \neq 0$  (le torseur n'est pas un glisseur).

### 1. Équiprojectivité des moments

$$\text{Soit : } \{T\} = \begin{pmatrix} \vec{S} \\ \vec{M}_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{S} \\ \vec{M}_B \end{pmatrix}$$

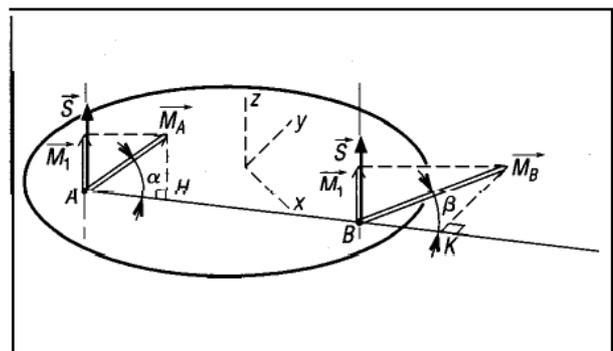
$$\text{avec } \vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{S}$$

Multiplions scalairement

les deux membres par  $\vec{BA}$

$$\begin{aligned} \vec{M}_B \cdot \vec{BA} &= \vec{M}_A \cdot \vec{BA} + (\vec{BA} \wedge \vec{S}) \cdot \vec{BA} \\ &= \vec{M}_A \cdot \vec{BA} + 0 \end{aligned}$$

**Remarque** :  $\vec{BA} \wedge \vec{S}$  est un vecteur perpendiculaire à la fois à  $\vec{BA}$  et à  $\vec{S}$ .  
Il en résulte que  $(\vec{BA} \wedge \vec{S}) \cdot \vec{BA} = 0$



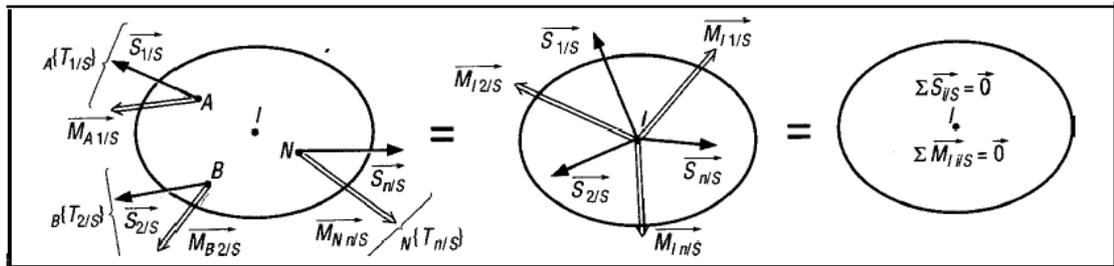
$$\vec{M}_B \cdot \vec{AB} = \vec{M}_A \cdot \vec{AB} \iff AH = BK$$

**Remarque** : de façon analogue, la projection des moments sur la direction de la résultante  $\vec{S}$  donne toujours la même valeur  $\vec{M}_I$ .

## VII • Principe fondamental de la statique

**Énoncé** : un solide (S), en équilibre sous l'action de  $n$  torseurs d'actions mécaniques  ${}_A\{T_{1/S}\}, {}_B\{T_{2/S}\}, \dots, {}_N\{T_{n/S}\}$  reste en équilibre si la somme des  $n$  torseurs, tous écrits au même point  $I$ , est égale au torseur nul  $\{0\}$  :  ${}_I\{T_{1/S}\} + {}_I\{T_{2/S}\} + \dots + {}_I\{T_{n/S}\} = \{0\}$

**Remarques** :  $\{T_{1/S}\} = {}_A \begin{pmatrix} \vec{S}_{1/S} \\ \vec{M}_{A1/S} \end{pmatrix}$  ;  $\{T_{2/S}\} = {}_B \begin{pmatrix} \vec{S}_{2/S} \\ \vec{M}_{B2/S} \end{pmatrix}$  ; ... ;  $\{T_{n/S}\} = {}_N \begin{pmatrix} \vec{S}_{n/S} \\ \vec{M}_{Nn/S} \end{pmatrix}$



L'addition des  $n$  torseurs se ramène à deux équations vectorielles dans l'espace :

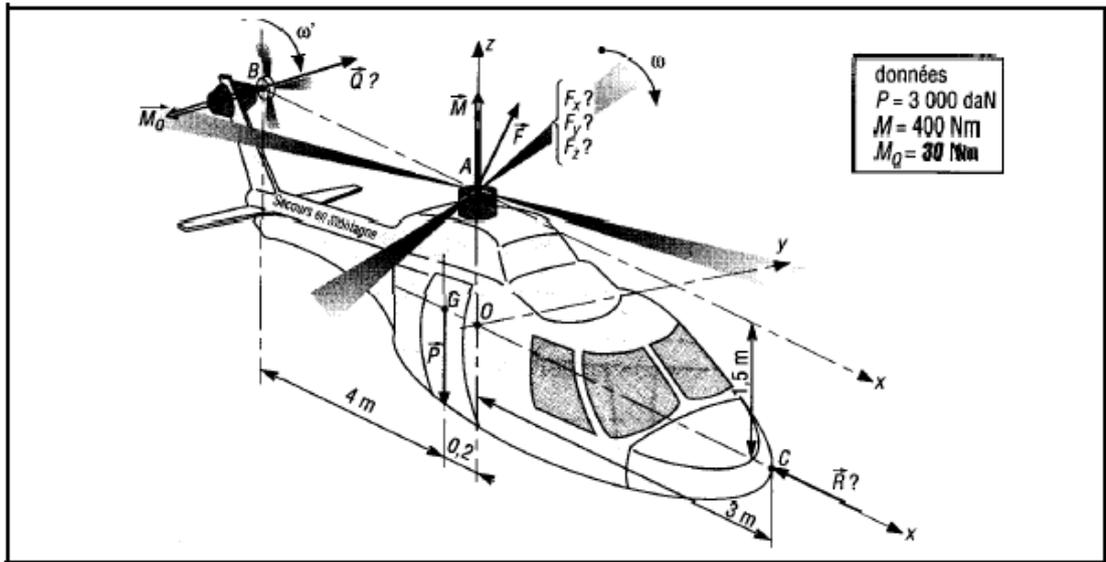
**a)**  $\Sigma \vec{S}_{i/S} = \vec{S}_{1/S} + \vec{S}_{2/S} + \dots + \vec{S}_{n/S} = \vec{0}$  (donne trois équations scalaires de projection sur les axes  $x, y, z$ ).

**b)**  $\Sigma \vec{M}_{i/S} = \vec{M}_{I1/S} + \vec{M}_{I2/S} + \dots + \vec{M}_{In/S} = \vec{0}$  (donne trois équations scalaires de projection sur les axes  $x, y, z$ ).

### Exemple

L'hélicoptère proposé évolue horizontalement à vitesse constante suivant l'axe  $(0, x)$  ; l'axe  $(0, z)$  est vertical.  $\vec{F}$  et  $\vec{M}$  schématisent les actions exercées par l'air sur les pales du rotor principal.  $\vec{M}_Q$  et  $\vec{Q}$  sont les actions sur le rotor anti-couple,  $\vec{R}$  est la résistance de l'air sur l'ensemble de l'appareil et  $\vec{P}$  le poids total.

Écrire les torseurs correspondant aux actions précédentes. Isoler l'hélicoptère ; appliquer le principe fondamental de la statique ; en déduire  $\vec{R}$ ,  $\vec{Q}$  et  $\vec{F}$ .



**Résolution** : isolons l'ensemble de l'hélicoptère et appliquons le principe fondamental. L'hélicoptère est soumis à l'action de quatre torseurs d'actions extérieures :

a) action du poids :

$$\{ \mathcal{F}_P \} = \begin{Bmatrix} \vec{P} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -P & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0,2P \\ -P & 0 \end{Bmatrix}$$

avec  $\overline{M}_A(\vec{P}) = \overline{M}_O(\vec{P}) + \overrightarrow{AG} \wedge \vec{P} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0,2 \\ 0 \\ -1,5 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,2P \\ 0 \end{bmatrix}$

b) résistance de l'air :

$$\{ \mathcal{F}_R \} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -R & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -R & 0 \\ 0 & 1,5R \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

avec  $\overline{M}_A(\vec{R}) = \overline{M}_C(\vec{R}) + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1,5 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,5R \\ 0 \end{bmatrix}$

c) action du rotor de queue :

$$\{ \mathcal{F}_B \} = \begin{Bmatrix} \vec{Q} \\ \vec{M}_Q \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Q & -M_Q \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Q & -M_Q \\ 0 & -4,2Q \end{Bmatrix}$$

avec  $\overline{M}_A(\vec{Q}) = \overline{M}_B(\vec{Q}) + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{Q} = \begin{bmatrix} 0 \\ -M_Q \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4,2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ Q \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -M_Q \\ -4,2Q \end{bmatrix}$

d) action du rotor principal :

$$\{ \mathcal{F}_A \} = \begin{Bmatrix} \vec{F} \\ \vec{M} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ F_z & M \end{Bmatrix}$$

Écrivons le principe fondamental au point A :

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \mathcal{F}_A \right\} + \left\{ \mathcal{F}_B \right\} + \left\{ \mathcal{F}_R \right\} + \left\{ \mathcal{F}_P \right\} = \{0\} \\
 & \begin{pmatrix} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ F_z & M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Q & -M_Q \\ 0 & -4,2Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -R & 0 \\ 0 & 1,5R \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0,2P \\ -P & 0 \end{pmatrix} = \{0\}
 \end{aligned}$$

On obtient les équations :

$$F_x - R = 0 \quad (1) \quad 0 = 0 \quad (4)$$

$$F_y + Q = 0 \quad (2) \quad -M_Q + 1,5R - 0,2P = 0 \quad (5)$$

$$F_z - P = 0 \quad (3) \quad M - 4,2Q = 0 \quad (6)$$

$$(3) \text{ donne } F_z = P = 3000 \text{ daN} ; \quad (6) \text{ donne } Q = \frac{M}{4,2} = \frac{40}{4,2} = 9,5 \text{ daN} ;$$

$$(5) \text{ donne } R = \frac{M_Q + 0,2P}{1,5} = 402 \text{ daN} ; \quad (1) \text{ donne } F_x = R = 402 \text{ daN} ;$$

$$(2) \text{ donne } F_y = -Q = -9,5 \text{ daN}.$$



**b) Cas général**

On généralise le cas précédent ;  $\overrightarrow{\omega(R/R_0)} = \vec{\omega}$  est la vitesse de rotation de R par rapport à  $R_0$  :

$\left(\frac{d\vec{i}_0}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{j}_0}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{k}_0}{dt}\right)_{R_0} = \vec{0}$	$\left(\frac{d\vec{i}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{j}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{k}}{dt}\right)_R = \vec{0}$
$\left(\frac{d\vec{i}}{dt}\right)_{R_0} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}$	$\left(\frac{d\vec{j}}{dt}\right)_{R_0} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}$
$\left(\frac{d\vec{k}}{dt}\right)_{R_0} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}$	

## 2. Dérivée d'un vecteur $\vec{Q}$ dans des repères différents

**a) Cas de repères  $R$  et  $R_0$  en translation**

$x$  est constamment parallèle à  $x_0$ ,  $y$  à  $y_0$ , et  $z$  à  $z_0$ . La dérivée du vecteur  $\vec{Q}$  fonction du temps ( $\vec{Q} = Q(t)\vec{i}$ ) est dans ce cas particulier la même dans les deux repères.

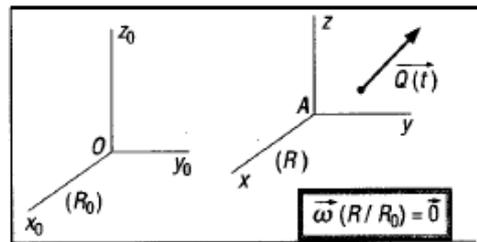


Fig. 2

$$\left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_R \quad \text{si } R \text{ et } R_0 \text{ en translation} \\ (\overrightarrow{\omega(R/R_0)} = \vec{0})$$

**b) Cas de repères  $R$  et  $R_0$  en mouvement quelconque :**

$\vec{Q}(t)$  est en mouvement par rapport aux deux repères.  $\vec{\omega}(R/R_0)$  définit la vitesse angulaire de R par rapport à  $R_0$ .

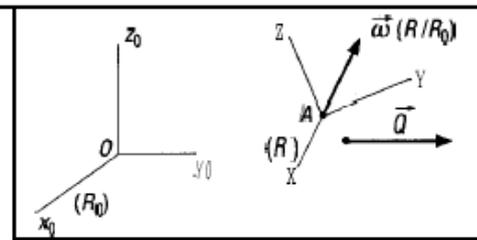


Fig. 3

$$\vec{Q} = Q_x \vec{i} + Q_y \vec{j} + Q_z \vec{k} ; \left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_R = \dot{Q}_x \vec{i} + \dot{Q}_y \vec{j} + \dot{Q}_z \vec{k}$$

$$\left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_{R_0} = \dot{Q}_x \vec{i} + \dot{Q}_y \vec{j} + \dot{Q}_z \vec{k} + Q_x \left(\frac{d\vec{i}}{dt}\right)_{R_0} + Q_y \left(\frac{d\vec{j}}{dt}\right)_{R_0} + Q_z \left(\frac{d\vec{k}}{dt}\right)_{R_0}$$

$$\left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_R + Q_x (\vec{\omega} \wedge \vec{i}) + Q_y (\vec{\omega} \wedge \vec{j}) + Q_z (\vec{\omega} \wedge \vec{k})$$

$$= \left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_R + \vec{\omega} \wedge (Q_x \vec{i} + Q_y \vec{j} + Q_z \vec{k})$$

d'où la formule fondamentale :

$$\left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_{R_0} = \left(\frac{d\vec{Q}}{dt}\right)_R + \vec{\omega}(R/R_0) \wedge \vec{Q}$$

## II - Relation entre les vitesses des points d'un solide

### 1. Formule générale

$R_0$  est le repère (ou solide) de référence ;  $R$  est lié au solide et  $\vec{\omega}(R/R_0)$  définit la vitesse angulaire du solide par rapport à  $R_0$ .

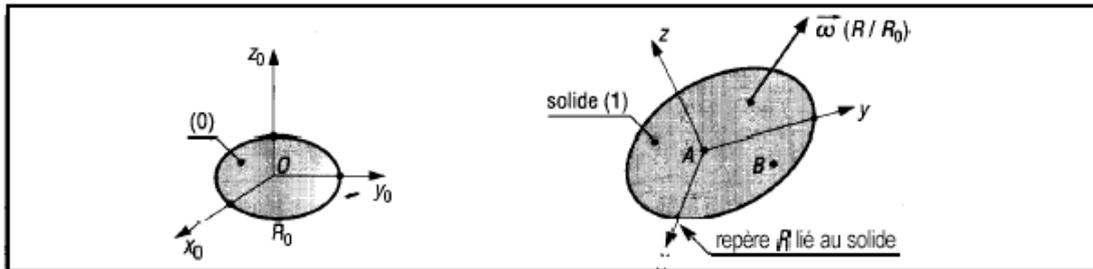


Fig. 4

$$\left( \frac{d\vec{AB}}{dt} \right)_{R_0} = \left[ \frac{d(\vec{AO} + \vec{OB})}{dt} \right]_{R_0} = \left( \frac{d\vec{OB}}{dt} \right)_{R_0} - \left( \frac{d\vec{OA}}{dt} \right)_{R_0} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$$

$$\left( \frac{d\vec{AB}}{dt} \right)_{R_0} = \left( \frac{d\vec{AB}}{dt} \right)_R + \vec{\omega}_{(R/R_0)} \wedge \vec{AB} = \vec{0} + \vec{\omega}_{(R/R_0)} \wedge \vec{AB}$$

En rassemblant les deux résultats, on obtient

$$\begin{aligned} \vec{V}_B &= \vec{V}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AB} \\ \text{ou } \vec{V}_{B(R/R_0)} &= \vec{V}_{A(R/R_0)} + \vec{\omega}_{(R/R_0)} \wedge \vec{AB} \\ \text{ou } \vec{V}_{B1/0} &= \vec{V}_{A1/0} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{AB} \end{aligned}$$

### 2. Propriété d'équiprojectivité

La propriété d'équiprojectivité est l'une des propriétés les plus importantes de la cinématique du solide.

En multipliant scalairement par  $\vec{AB}$  les deux membres de la formule précédente et en remarquant que  $(\vec{\omega} \wedge \vec{AB}) \cdot \vec{AB} = 0$ , on obtient :

$$\vec{V}_{B1/0} \cdot \vec{AB} = \vec{V}_{A1/0} \cdot \vec{AB}$$

Autrement dit, pour deux points A et B appartenant à un même solide (1), en mouvement par rapport à un solide (ou repère) (0), la projection de  $\vec{V}_{B1/0}$  sur la droite AB est égale à la projection de  $\vec{V}_{A1/0}$  sur AB.

**Remarque :** on obtient une relation analogue en multipliant scalairement les deux membres par  $\vec{\omega}_{1/0}$ .

$$\vec{V}_{B1/0} \cdot \vec{\omega}_{1/0} = \vec{V}_{A1/0} \cdot \vec{\omega}_{1/0}$$

**Exemple :** Une échelle AB mesurant 3m posée en B sur le sol et appuyée en A sur un mur. Sachant que la vitesse de A est 0.5 m/s, calculer celle de B pour  $\theta=30^\circ$ .

*Solution:*

$$\vec{V}_A \cdot \vec{AB} = \vec{V}_B \cdot \vec{AB} \Rightarrow V_A \cos \theta = V_B \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = V_B \sin \theta$$

$$V_B = V_A / \tan \theta = 0.57 \text{ m/s}$$

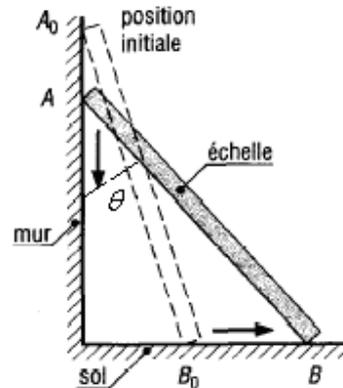


Fig 5

### III - Glissement - roulement - pivotement

#### 1. Vitesse de glissement

A est le point de contact entre les solides (1) et (2) en glissement relatif.  $\vec{t}$  est un vecteur unitaire du plan tangent au contact en A.  $\vec{n}$  est la normale (vecteur unitaire perpendiculaire à  $\vec{t}$ ).

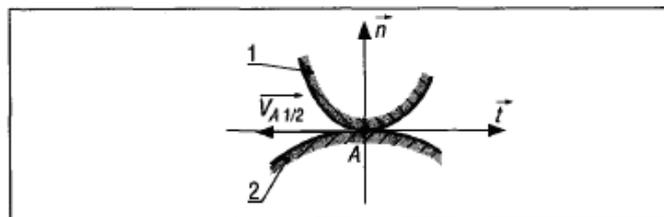


Fig. 6

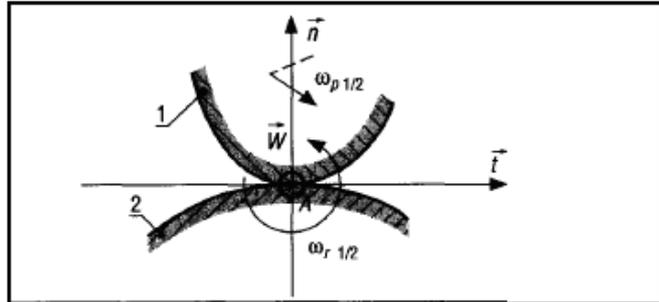
On appelle vitesse de glissement en A du solide (1) par rapport au solide (2), la vitesse relative  $\vec{V}_{A1/2}$ .  
 $\vec{V}_{A1/2}$  ou  $\vec{V}_{A2/1}$  est toujours contenue dans le plan tangent au contact (portée par  $\vec{t}$ ).

**Remarque:** **Roulement sans glissement:**  $\vec{V}_{A1/2} = 0$

## 2. Roulement et pivotement

$\vec{W}$  est un vecteur unitaire perpendiculaire à  $\vec{n}$  et  $\vec{t}$ .

La vitesse angulaire  $\omega_{1/2}$  (ou  $\vec{\omega}_{1/2} = \omega_{1/2} \cdot \vec{W}$ ) caractérise le roulement du solide (1) par rapport au solide (2) autour de l'axe  $\vec{W}$ .



**Fig. 7**

$\omega_{p1/2}$  ( $\vec{\omega}_{p1/2} = \omega_{p1/2} \cdot \vec{n}$ ) est le pivotement de (1) par rapport à (2) autour de  $\vec{n}$ .

## 3. Combinaisons possibles

	$\omega_{1/2} = 0$ $\omega_{p1/2} = 0$	$\omega_{1/2} = 0$ $\omega_{p1/2} \neq 0$	$\omega_{1/2} \neq 0$ $\omega_{p1/2} = 0$	$\omega_{1/2} \neq 0$ $\omega_{p1/2} \neq 0$
$\vec{V}_{A1/2} = \vec{0}$	adhérence	pivotement	roulement	roulement avec pivotement
$\vec{V}_{A1/2} \neq \vec{0}$	glissement	glissement avec pivotement	glissement avec roulement	glissement avec roulement et pivotement

# IV • Torseur cinématique

## Définition

l'ensemble des vecteurs-vitesses des points d'un même solide à une structure de torseur, appelé torseur cinématique. Ce torseur possède les propriétés générales des autres torseurs.

**Exemple de notation** (solide 1 en mouvement par rapport à 0)

$$\left\{ v_{1/0} \right\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{\omega}_{1/0} \\ \vec{V}_{A1/0} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} \omega_x V_{Ax} \\ \omega_y V_{Ay} \\ \omega_z V_{Az} \end{Bmatrix}_A \quad \begin{aligned} \vec{\omega}_{1/0} &= \omega_x \vec{i}_0 + \omega_y \vec{j}_0 + \omega_z \vec{k}_0 ; \\ \vec{V}_{A1/0} &= V_{Ax} \vec{i}_0 + V_{Ay} \vec{j}_0 + V_{Az} \vec{k}_0 \end{aligned}$$

**Remarques :**  $\vec{\omega}_{1/0}$  ou  $\vec{\omega}_{(R/R0)}$  est la résultante générale du torseur et a même valeur en tout point.  $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AB} = \vec{V}_A + \vec{BA} \wedge \vec{\omega}$  est analogue à la relation  $\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R}$  du chapitre « torseurs ».

## V - Relation entre les accélérations des points d'un solide

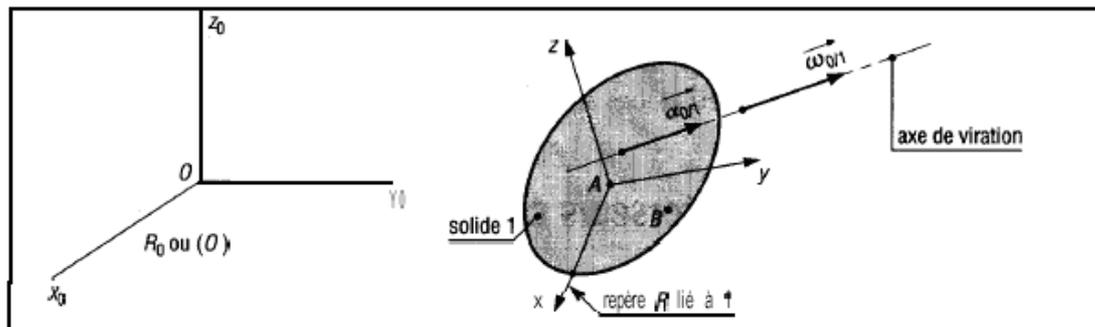


Fig. 8

$\vec{\omega}_{(R/R_0)} = \vec{\omega}_{1/0} = \vec{\omega}$  est la vitesse de rotation du solide 1 et  $\vec{\alpha}_{(R/R_0)} = \vec{\alpha}_{1/0} = \vec{\alpha}$  l'accélération angulaire du mouvement.

**Remarque :**  $\vec{\alpha}_{1/0} = \left( \frac{d \vec{\omega}_{1/0}}{dt} \right)_{R_0} = \left( \frac{d \vec{\omega}_{1/0}}{dt} \right)_R + \vec{\omega}_{(R/R_0)} \wedge \vec{\omega}_{1/0} = \left( \frac{d \vec{\omega}_{1/0}}{dt} \right)_R$

En dérivant par rapport au temps et dans  $R_0$ , on obtient :

$$\vec{a}_{B1/0} = \vec{a}_{A1/0} + \vec{\alpha}_{1/0} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge (\vec{\omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{AB})$$

$$\text{ou } \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \wedge \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{AB})$$

$\vec{a}_B \cdot \overrightarrow{AB}$  est différent de  $\vec{a}_A \cdot \overrightarrow{AB}$ ; il n'y a pas équiprojectivité des accélérations sur  $\overrightarrow{AB}$  et, de ce fait, il n'existe pas de torseur des accélérations.

# VI-Composition de mouvements

## Rappels des formules fondamentales

$$\vec{V}_{B2/0} = \vec{V}_{B2/1} + \vec{V}_{B1/0}$$

$$\vec{\omega}_{2/0} = \vec{\omega}_{2/1} + \vec{\omega}_{1/0}$$

$$\vec{a}_{B2/0} = \vec{a}_{B2/1} + \vec{a}_{B1/0} + \vec{a}_{BC} \quad \text{avec} \quad \vec{a}_{BC} = 2 \vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{V}_{B2/1}$$

### Cas des accélérations angulaires

$$\left( \frac{d \vec{\omega}_{2/0}}{dt} \right)_0 = \left( \frac{d \vec{\omega}_{2/1}}{dt} \right)_0 + \left( \frac{d \vec{\omega}_{1/0}}{dt} \right)_0$$

$$\vec{\alpha}_{2/0} = \left( \frac{d \vec{\omega}_{2/1}}{dt} \right)_1 + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{\omega}_{2/1} + \vec{\alpha}_{1/0}$$

$$\vec{\alpha}_{2/0} = \vec{\alpha}_{2/1} + \vec{\alpha}_{1/0} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{\omega}_{2/1}$$

# VII- Paramétrages utilisés dans l'espace

Pour repérer la position d'un solide (S ou 1) dans l'espace par rapport à un solide ou repère de référence (0 ou  $R_0$ ), on commence généralement par lier un repère  $R_S$  (A,  $x_S$ ,  $y_S$ ,  $z_S$ ) ou  $R_1$  au solide. La position du solide est définie par la position de  $R_S$  par rapport à  $R_0$ . Mêmes remarques pour les mouvements et les grandeurs cinématiques liées au solide. Dans le cas le plus général, six paramètres seront nécessaires pour définir avec exactitude la position de  $R_S$  par rapport à  $R_0$  :

- trois paramètres pour définir l'origine (A) de  $R_S$  ;
- trois paramètres pour définir la position angulaire de  $R_S$ .

## 1. Paramètres utilisables pour repérer la position d'un point

- a) Coordonnées cartésiennes dans l'espace (x, y, z).
- b) Coordonnées cylindriques (r,  $\theta$ , z).
- c) Coordonnées sphériques ( $\rho$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ ).

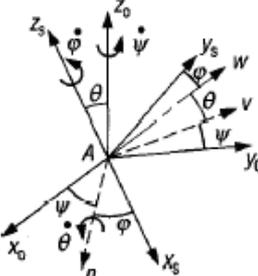
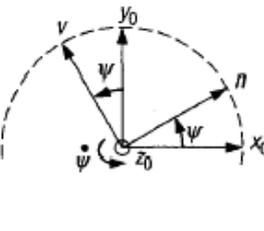
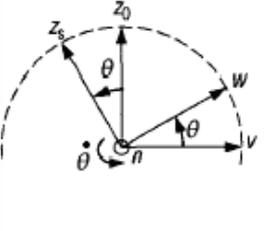
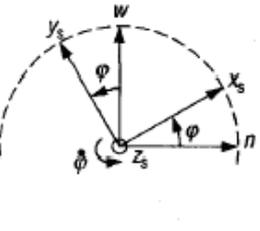
**Remarques** : dans le premier cas, on dispose de trois distances, dans le second de deux distances plus un angle, dans le troisième de deux angles plus une distance.

## 2. Paramètres utilisés pour repérer la **position** angulaire du **solide**

Un ou deux angles judicieusement choisis suffisent pour un grand nombre d'applications courantes. Pour les cas les plus complexes, les angles **d'Euler** sont régulièrement utilisés (robots, avions, gyroscopes, etc.).

**Remarque** : le choix et la position des angles **d'Euler** peuvent varier sensiblement d'un pays à l'autre et d'un ouvrage à l'autre ; cependant, le principe reste le même.

**Angles d'Euler** : on passe de  $R_0(x_0, y_0, z_0)$ , le repère de référence, à  $R_S(x_S, y_S, z_S)$ , le repère lié au solide, par trois rotations d'axe successives, et inversement.

	$\psi = \text{angle de précession}$ 	$\theta = \text{angle de nutation}$ 	$\phi = \text{angle de rotation propre}$ 
<p><b>Vitesse angulaire</b></p> $\vec{\omega}_{(S/RO)} = \dot{\psi} \vec{z}_0 + \dot{\phi} \vec{z}_S + \dot{\theta} \vec{n}$ $\vec{\omega}_{(S/RO)} = (\dot{\phi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi) \vec{x}_0 + (\dot{\theta} \sin \psi - \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi) \vec{y}_0 + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \vec{z}_0$ $\vec{\omega}_{(S/RO)} = (\dot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi) \vec{x}_S + (\dot{\psi} \sin \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi) \vec{y}_S + (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta) \vec{z}_S$ <p><b>Remarques</b> : <math>\dot{\psi} = \frac{d\psi}{dt}</math> ; <math>\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}</math> ; <math>\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}</math></p>			

# CINÉTIQUE

## OBJECTIFS

- Définir dans l'espace les notions de quantité de mouvement, de moment cinétique, d'énergie cinétique et énoncer les théorèmes correspondants.
- Donner des éléments concernant le calcul des matrices d'inertie.
- Énoncer le principe fondamental de la dynamique et développer les principales applications : équations **d'Euler**, rotation autour d'un point, rotation d'axe, problèmes d'équilibrage

## I - Système à masse conservative

Un système matériel  $E$  (solide, fluide, etc.) est dit à masse conservative si celle-ci reste constante au cours du temps. **À** la fois pour  $E$  et pour n'importe quel sous-système ou partie de  $E$  :

**Remarque** : tous les théorèmes et relations abordés par la suite supposent des systèmes à masse conservative.

$$\text{masse de } E \text{ à } t = \text{masse de } E \text{ à } t_1 = \text{masse de } E \text{ à } t_2$$

Exemple : une fusée n'est pas un système à masse conservative. Au fur et à mesure du vol sa masse diminue du fait de la combustion du carburant.

## II - Centre de gravité ou centre de masse

### 1. Définitions

**Centre de masse** : il est lié à la notion de masse  $m$  et représente le point central  $de$  l'ensemble de toutes les masses constituant un objet ou un système matériel et est confondu avec le centre de gravité  $G$ .

**Centre de gravité** : il est le point d'application du poids ou du vecteur-poids  $\vec{P}$  d'un objet. Cette propriété est vérifiée quelle que soit la position du système dans l'espace.

### Exemple

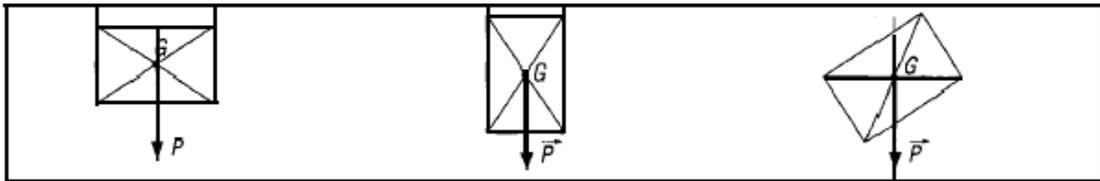


Fig. 1

**Remarque** : centre de gravité et centre de masse font intervenir la masse volumique  $\rho$  du matériau.

$$m = \rho \cdot V$$

$$P = mg$$

$m$  : masse du solide en kg  
 $\rho$  : masse volumique en  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$   
 $V$  : volume du solide en  $\text{m}^3$   
 $P$  : poids du solide en N

## 2. Détermination de la position du centre de gravité G

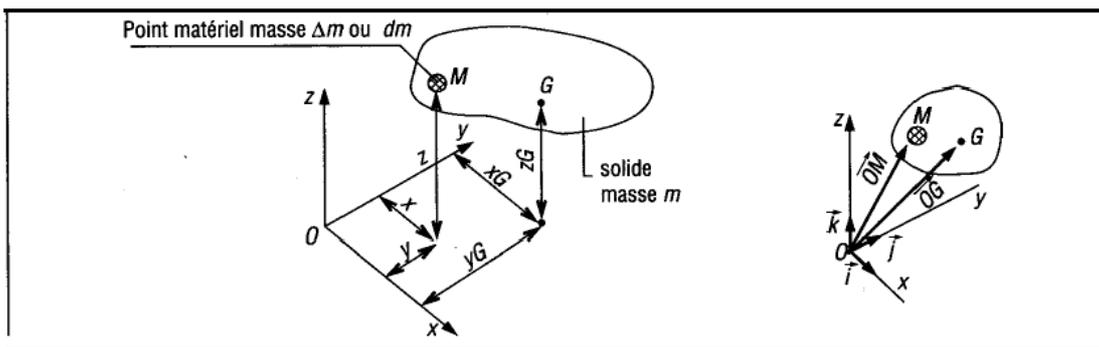


Fig. 2

$$x_G = \frac{\Delta m_1 x_1 + \Delta m_2 x_2 + \dots + \Delta m_n x_n}{\Delta m_1 + \Delta m_2 + \dots + \Delta m_n} = \frac{\sum x \Delta m}{m} = \frac{\int x dm}{m}$$

$$y_G = \frac{\Delta m_1 y_1 + \Delta m_2 y_2 + \dots + \Delta m_n y_n}{\Delta m_1 + \Delta m_2 + \dots + \Delta m_n} = \frac{\sum y \Delta m}{m} = \frac{\int y dm}{m}$$

$$z_G = \frac{\Delta m_1 z_1 + \Delta m_2 z_2 + \dots + \Delta m_n z_n}{\Delta m_1 + \Delta m_2 + \dots + \Delta m_n} = \frac{\sum z \Delta m}{m} = \frac{\int z dm}{m}$$

### 3. Propriétés

Si un solide possède un plan, un axe ou un centre de symétrie, son centre de gravité est situé respectivement dans le plan de symétrie, sur l'axe de symétrie ou au centre de symétrie.

### 4. Barycentre

Le barycentre représente le centre géométrique d'un objet (volume, surface, ligne) et ne fait pas intervenir la notion de masse volumique ; il ne tient compte que de la géométrie. Si la masse volumique d'un objet est la même en tout point, autrement dit si l'objet est homogène, le barycentre est confondu avec le centre de gravité. Si le matériau n'est pas homogène, barycentre et centre de gravité sont deux points différents.

### 5 - Centre de gravité (ou barycentre) des solides composés

Les solides peuvent être décomposés en éléments de forme géométrique simple dont les centres de gravité sont connus.

Dans le cas de la figure 3 :

$$m = m_1 + m_2 + m_3$$

$$m \cdot x_G = m_1 x_{G1} + m_2 x_{G2} + m_3 x_{G3}$$

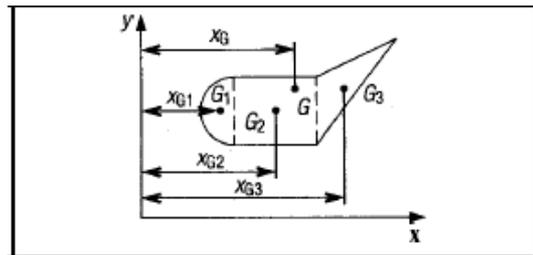


Fig. 3

$$\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OG}_1 + m_2 \vec{OG}_2 + \dots + m_n \vec{OG}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i \vec{OG}_i}{m}$$

Les équations de projection sont :

$$x_G = \frac{\sum m_i x_{Gi}}{m} \quad y_G = \frac{\sum m_i y_{Gi}}{m} \quad z_G = \frac{\sum m_i z_{Gi}}{m}$$

avec  $\vec{OG}_i = x_{Gi} \cdot \vec{i} + y_{Gi} \cdot \vec{j} + z_{Gi} \cdot \vec{k}$ .

**Remarque** : le centre de gravité d'un solide composé de deux autres solides de centres de gravité  $G_1$  et  $G_2$  est situé sur la droite  $G_1G_2$ .

### Exemple

Déterminons le centre de gravité d'un solide composé d'un cylindre en aluminium ( $\varnothing 40$  ; épaisseur 12 mm ;  $2\,700 \text{ kg.m}^{-3}$ ) collé à une tige en cuivre ( $\varnothing 10$  ; longueur 100 mm ;  $9\,000 \text{ kg.m}^{-3}$ ).

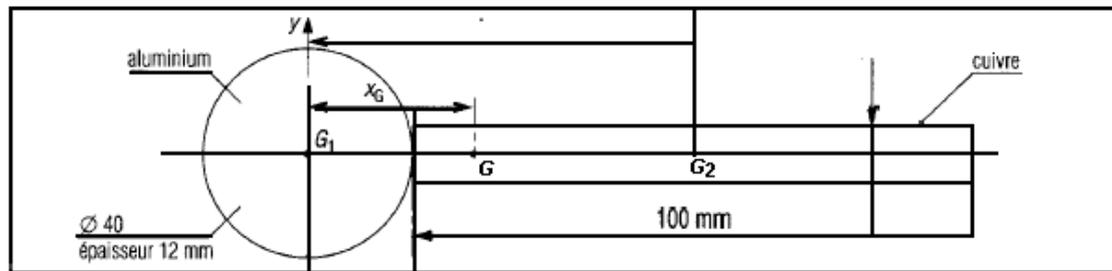


Fig. 4

$$m_1 = \rho_1 V_1 = 2,7 \times (1,2 \times \pi \times 2^2) = 40,72 \text{ g (avec } \rho_1 = 2,7 \text{ g.cm}^{-3}\text{)}$$

$$m_2 = \rho_2 V_2 = 9 \times (10 \times \pi \times 0,5^2) = 70,69 \text{ g (avec } \rho_2 = 9 \text{ g.cm}^{-3}\text{)}$$

$$x_G = \frac{m_1 x_{G1} + m_2 x_{G2}}{m_1 + m_2} = \frac{40,72 \times 0 + 70,69 \times 70}{40,72 + 70,69} = 44,41 \text{ mm}$$

x est axe de symétrie, G est situé sur cet axe et  $y = 0$ .

**Remarque** : dans le cas où les deux cylindres sont du même matériau,  $\rho_1 = \rho_2$  et

$$x'_G = \frac{V_1 x_{G1} + V_2 x_{G2}}{V_1 + V_2} = \frac{(1,2 \times \pi \times 2^2) \times 0 + (10 \times \pi \times 0,5^2) \times 70}{15,08 + 7,85} \approx 24 \text{ mm}$$

<p><b>rectangle</b></p> <p><math>S = bh</math></p>	<p><b>parallélogramme</b></p> <p><math>S = bh</math></p>	<p><b>cercle</b></p> <p><math>S = \pi R^2</math></p>
<p><b>1/2 cercle</b></p> <p><math>\frac{4R}{3\pi}</math></p> <p><math>\frac{4R}{3\pi}</math></p> <p>1/4 cercle</p>	<p><b>secteur circulaire</b></p> <p><math>S = \alpha R^2</math></p> <p><math>2r \sin \alpha</math></p> <p><math>3\alpha</math></p>	
<p><b>triangle</b></p> <p><math>S = \frac{bh}{2}</math></p> <p><math>\frac{h}{3}</math></p> <p><math>\frac{b}{2}</math></p> <p><math>\frac{b}{2}</math></p>	<p><b>trapèze</b></p> <p><math>S = h \left( \frac{a+b}{2} \right)</math></p> <p><math>\frac{a}{2}</math></p> <p><math>\frac{a}{2}</math></p> <p><math>b</math></p> <p><math>h</math></p> <p><math>a</math></p> <p><math>\frac{b}{2}</math></p> <p><math>\frac{b}{2}</math></p>	<p><b>tige circulaire</b></p> <p><math>R \sin \alpha</math></p> <p><math>\alpha</math></p>
<p><b>1/2 sphère</b></p> <p><math>V = \frac{2}{3} \pi R^3</math></p> <p><math>\frac{3R}{8}</math></p> <p><math>R</math></p>	<p><b>tige droite</b></p> <p><math>L/2</math></p> <p><math>L/2</math></p>	<p><b>tige 1/2 cercle</b></p> <p><math>\frac{2R}{\pi}</math></p> <p>1/4 cercle</p>
<p><b>cône</b></p> <p><math>V = \frac{\pi R^2 h}{3}</math></p> <p><math>h</math></p> <p><math>\frac{h}{4}</math></p> <p><math>R</math></p>	<p><b>cône creux</b></p> <p><math>h</math></p> <p><math>\frac{h}{3}</math></p> <p><math>R</math></p>	<p><b>surface parabolique</b></p> <p><math>S = \frac{4}{3} ab</math></p> <p><math>\frac{3a}{5}</math></p> <p><math>a</math></p> <p><math>b</math></p> <p><math>y</math></p> <p><math>x</math></p> <p>parabole <math>y = x^2</math></p>
<p><b>1/2 cylindre</b></p> <p><math>IG = \frac{4R}{3\pi}</math></p> <p><math>\frac{h}{2}</math></p> <p><math>\frac{h}{2}</math></p> <p><math>R</math></p>	<p><b>1/2 cylindre creux</b></p> <p><math>IG = \frac{2R}{\pi}</math></p> <p><math>\frac{h}{2}</math></p> <p><math>\frac{h}{2}</math></p> <p><math>R</math></p>	<p><b>1/2 ellipse</b></p> <p><math>S = \frac{\pi ab}{2}</math></p> <p><math>\frac{4b}{3\pi}</math></p> <p><math>a</math></p> <p><math>a</math></p> <p><math>b</math></p>

# III-MOMENTS D'INERTIE- MATRICE D'INERTIE

## 1. Moment d'inertie d'un point matériel ou d'une masse élémentaire

Le moment d'inertie  $\Delta J_u$ , par rapport à l'axe  $u$ , du point matériel  $M$  de masse  $\Delta m$  ou  $dm$ , situé à la distance constante  $r$  de l'axe  $u$  est égal à :

$$\Delta J_u = r^2 \Delta m = r^2 dm \quad \text{unités : kg.m}^2$$

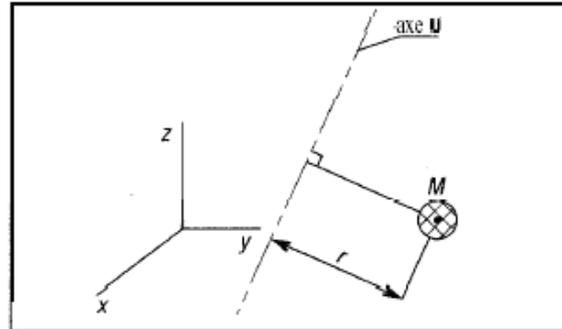


Fig. 5

## 2. Moment d'inertie d'un solide de masse m par rapport à un axe

Le moment d'inertie  $J_u$ , par rapport à l'axe  $u$ , d'un solide de masse  $m$ , est égal à la somme des moments d'inertie (par rapport au même axe) de l'ensemble des points matériels  $M_1, M_2, \dots, M_n$  constituant le solide.

$$J_u = r_1^2 \Delta m_1 + r_2^2 \Delta m_2 + \dots + r_n^2 \Delta m_n$$

$$J_u = \sum_{(s)} r^2 \Delta m = \int r^2 dm$$

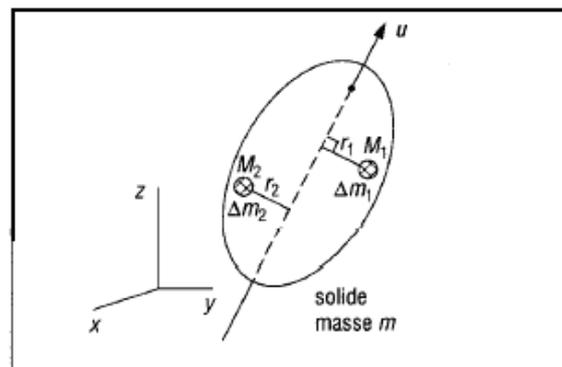


Fig. 6

## 3. Rayon de gyration $r_k$

Si  $J_u$  est le moment d'inertie, par rapport à l'axe  $u$ , d'un solide de masse  $m$ , le rayon de gyration  $r_k$  est défini par :

$$r_k = \sqrt{\frac{J}{m}} \quad \text{ou} \quad J = m r_k^2$$

**Remarque** : tout se passe comme si la masse  $m$  du solide était concentrée en un point situé à la distance  $r_k$  de l'axe  $u$ .

## 4. Changement d'axe

Les axes  $u$  et  $u_G$  sont parallèles et distants de  $d$ . La relation indiquée s'appelle la formule de Huygens.

$$J_u = J_{u_G} + md^2$$

Si on fait intervenir les rayons de gyration respectifs :

$$r_k^2 = r_{kG}^2 + d^2$$

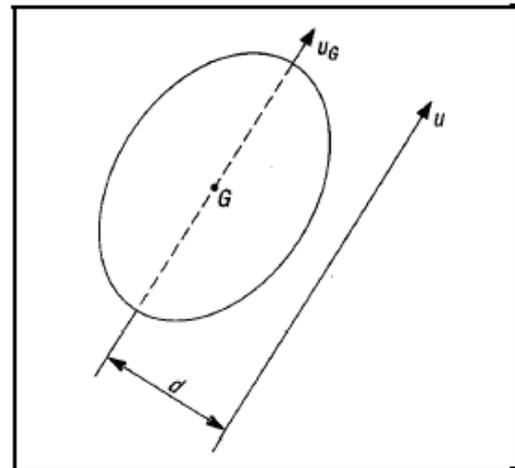


Fig. 7

## 5. Moment d'inertie des solides composés

Le moment d'inertie d'un solide composé est égal à la somme arithmétique des moments d'inertie de chacun des solides constitutifs par rapport au même axe.

## 6. Produits d'inertie $J_{xy}$ , $J_{xz}$ , $J_{yz}$

Lorsque les solides sont en rotation dans l'espace à trois dimensions, les produits d'inertie apparaissent lors des calculs dynamiques. Ils servent également à la définition de la matrice d'inertie d'un solide

$$\begin{aligned} J_{xy} &= J_{yx} = \int xy \, dm \\ J_{xz} &= J_{zx} = \int xz \, dm \\ J_{yz} &= J_{zy} = \int yz \, dm \end{aligned}$$

Huygens :

$$\begin{aligned} J_{xy} &= J_{x_G y_G} + m \, dx \, dy \\ J_{yz} &= J_{y_G z_G} + m \, dy \, dz \\ J_{xz} &= J_{x_G z_G} + m \, dx \, dz \end{aligned}$$

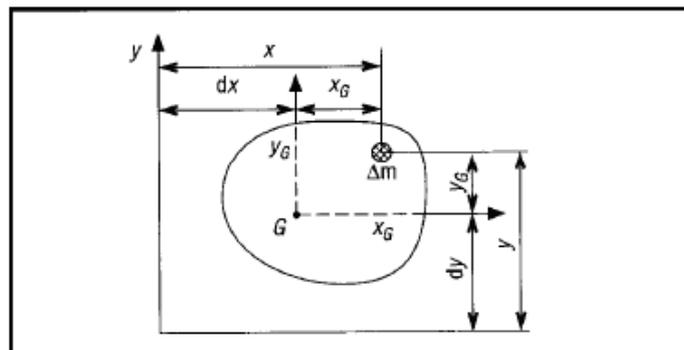


Fig. 8

## 7. Matrice ou tenseur d'inertie

### a. Définition

La matrice ou tenseur d'inertie est définie par:

$$[J_A]_{xyz} = \begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix}$$

## b. Formules utiles

Moment d'inertie par rapport au point A :

$$J_A = 1/2 (J_{xx} + J_{yy} + J_{zz})$$

Moment d'inertie du solide par rapport à un axe  $u$  quelconque passant par A :

$$J_{A,u} = \vec{u} [J_A] \vec{u}$$

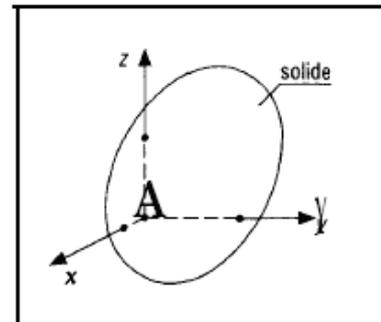


Fig.9

## c-Théorème de Huygens généralisé

Les repères  $(G, x_G, y_G, z_G)$  et  $A(x, y, z)$  sont liés au solide.

Les axes de repères sont parallèles entre eux :

$$\vec{AG} = X_G \vec{i} + Y_G \vec{j} + Z_G \vec{k}$$

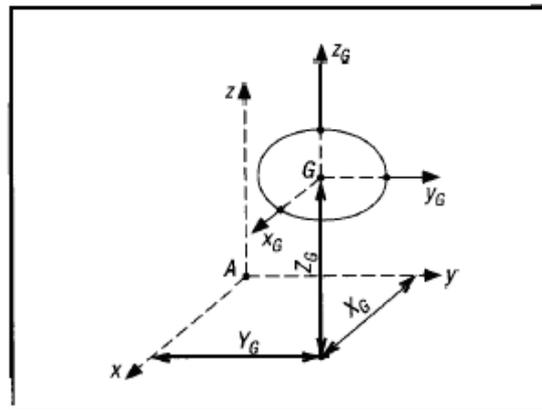


Fig. 10

La matrice d'inertie en  $A$  est obtenue par :

$$[J_A] = [J_G] + \begin{bmatrix} m(Y_G^2 + Z_G^2) & -m X_G Y_G & -m X_G Z_G \\ -m X_G Y_G & m(X_G^2 + Z_G^2) & -m Y_G Z_G \\ -m X_G Z_G & -m Y_G Z_G & m(Y_G^2 + X_G^2) \end{bmatrix}$$

### d. Cas particuliers liés aux symétries du solide

Particularité du solide	Exemple	Propriétés	Forme de la matrice d'inertie en A : $[J_A]$
Plan de symétrie (A, x, y)		$J_{yz} = 0$ $J_{zx} = 0$	$\begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & 0 \\ -J_{xy} & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix}$
Plan de symétrie (A, x, z)		$J_{xy} = 0$ $J_{yz} = 0$	$\begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & -J_{xz} \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ -J_{xz} & 0 & J_{zz} \end{bmatrix}$
Plan de symétrie (A, y, z)		$J_{xy} = 0$ $J_{xz} = 0$	$\begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & -J_{yz} \\ 0 & -J_{yz} & J_{zz} \end{bmatrix}$

Particularité du solide	Exemple	Propriétés	Forme de la matrice d'inertie en A : $[J_A]_{xyz}$
Axe de symétrie (A, z)		$J_{xy} = 0$ $J_{yz} = 0$ $J_{xz} = 0$	$\begin{bmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix}$
Axe de révolution (A, z)		$J_{xy} = 0$ $J_{yz} = 0$ $J_{xz} = 0$ $J_{xx} = J_{yy} = J$	$\begin{bmatrix} J & 0 & 0 \\ 0 & J & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix}$
Solide plat ("sans épaisseur") plan (x, y)		$J_{zz} = J_{xx} + J_{yy}$ $\rho =$ masse volumique $J_{xz} = J_{yz} = 0$ $J_{xx} = \rho e \int x^2$ $J_{yy} = \rho e \int y^2$ $I =$ moment quadratique	$\begin{bmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & 0 \\ -J_{xy} & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{bmatrix}$

## IV - Quantité de mouvement ( $\vec{p}$ )

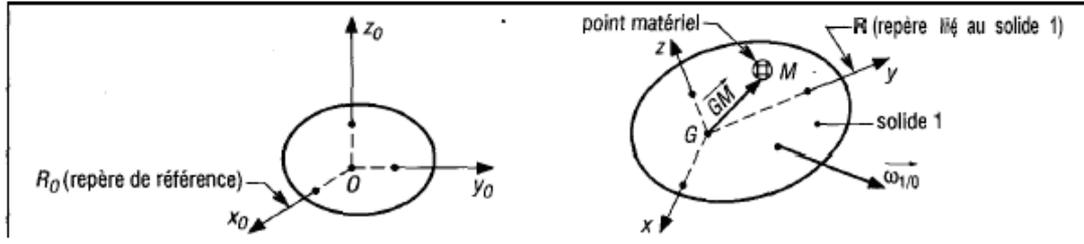


Fig. 11

Le repère  $R(G, x, y, z)$  est lié au solide (1) en mouvement par rapport au repère de référence  $R_0(0, x_0, y_0, z_0)$ .  $G$  est le centre de gravité du solide et  $\vec{\omega}_{1/0}$  sa vitesse angulaire.

$m_i$  ou  $dm$  est la masse du point matériel  $M$  appartenant au solide

$$m = \sum_{(s)} m_i = \int_S dm = \text{masse du solide}$$

La quantité de mouvement du solide (1) par rapport à  $R_0$  ou 0 est :

$$\begin{aligned} \vec{p}_{1/0} &= \sum_{(s)} m_i \vec{V}_{M1/0} = \int_{(s)} \vec{V}_{M1/0} dm \\ &= \int_{(s)} \frac{d\vec{OM}}{dt} dm = \frac{d}{dt} \left[ \int_{(s)} \vec{OM} dm \right] = \frac{d}{dt} [m \vec{OG}] = m \frac{d\vec{OG}}{dt} = m \vec{V}_{G1/0} \end{aligned}$$

En remarquant que  $\int_S \vec{OM} dm = m \vec{OG}$  par définition du centre de gravité :

$$\vec{p}_{1/0} = \int_S \vec{V}_{M1/0} dm = m \vec{V}_{G1/0}$$

## V - Moment cinétique - Torseur cinétique

### 1. Moment cinétique au centre de gravité $G$

#### Définition

Le moment cinétique du solide 1 est égal au moment résultant en  $G$  de toutes les quantités de mouvement  $m_i \vec{V}_{M1/0}$  ou  $\vec{V}_{M1/0} dm$  de l'ensemble des points matériels  $M$  constituant le solide.

$$\vec{\sigma}_{G1/0} = \sum_{(s)} \vec{GM} \wedge m_i \vec{V}_{M1/0} = \int \vec{GM} \wedge \vec{V}_{M1/0} dm$$

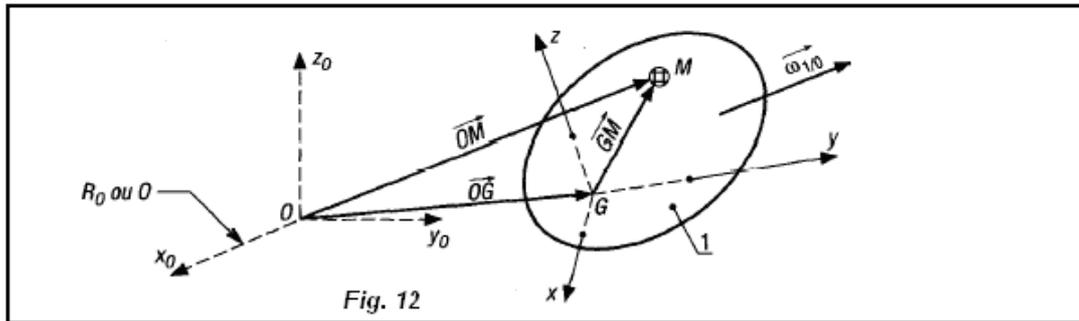


Fig. 12

**Relation fondamentale :**

En remplaçant  $\vec{V}_{M1/0} = \vec{V}_{G1/0} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{GM}$  et en remarquant que  $\int \vec{GM} dm = \vec{0}$  (par définition du centre de gravité), le moment cinétique s'exprime par :

$$\vec{\sigma}_{G1/0} = \int \vec{GM} \wedge (\vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{GM}) dm = [J_G][\omega_{1/0}]$$

$[J_G]$  est la matrice d'inertie du solide en G

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{xx} - J_{yy} - J_{zz} \\ -J_{xy} & J_{yy} - J_{zz} \\ -J_{xz} - J_{yx} & J_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = [J][\omega]$$

**Règle de calcul :** toujours exprimer dans le même repère, ou la même base, la matrice d'inertie  $[J]$  et le vecteur en produit avec elle ( $\vec{\omega}_{1/0}$  ou autre).

## 2. Cas d'un solide ayant un point fixe A

Si A est un *point fixe* du solide dans le repère de référence  $R_0$ , alors  $\vec{V}_{A1/0} = \vec{0}$ .  
 $\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AM} = \vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{AM}$

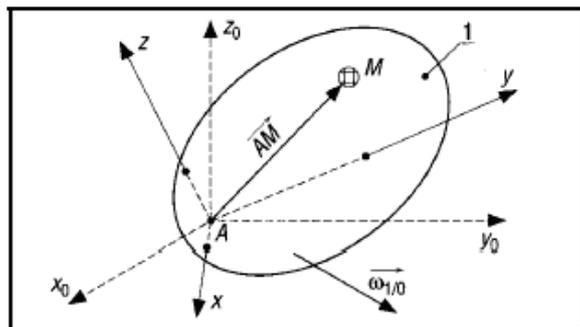


Fig. 13

$$\vec{\sigma}_{A1/0} = \int \vec{AM} \wedge \vec{V}_{M1/0} dm = \int \vec{AM} \wedge (\vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{AM}) dm = [J_A][\omega_{1/0}]$$

$[J_A]$  est la matrice d'inertie du solide en A

La matrice est symétrique et les moments d'inertie par rapport aux axes  $x, y, z$  apparaissent suivant la diagonale. Si on change l'orientation des axes liés au solide, les moments et produits d'inertie changent également.

Pour une même origine ( $A, O$ , etc.), il existe toujours un et un seul système d'axes  $X, Y, Z$ , appelés axes principaux d'inertie, pour lesquels la matrice est diagonale :

$$(J_{XY} = J_{XZ} = J_{YZ} = 0).$$

### 3. Moment cinétique au point 0

Le point  $O$  peut être l'origine du repère de référence ou n'importe quel point fixe de ce repère ( $\vec{V}_{O1/0} = 0$ ) ;  $\vec{OM} = \vec{OG} + \vec{GM}$ .

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{O1/0} &= \int \vec{OM} \wedge \vec{V}_{M1/0} dm = \int \vec{OM} \wedge (\vec{V}_{G1/0} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{GM}) dm \\ &= \int \vec{OG} \wedge \vec{V}_G dm + \int \vec{OG} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{GM}) dm + \int \vec{GM} \wedge \vec{V}_G dm + \int \vec{GM} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{GM}) dm \\ &= \vec{OG} \wedge m \vec{V}_G + \vec{0} + \vec{0} + \vec{\sigma}_{G1/0} \end{aligned}$$

$$\vec{\sigma}_{O1/0} = \vec{\sigma}_{G1/0} + \vec{OG} \wedge m \vec{V}_{G1/0}$$

Cette relation est connue sous le nom du Théorème de KOENIG

#### Exemple

Un disque plat (1), de masse 1 kg, de rayon  $R = 0,15$  m, est monté sur un arbre horizontal d'axe  $x_0$ , avec une inclinaison  $\alpha = 20^\circ$  par rapport au plan de rotation.

Si  $\omega_{1/0} = 32 \text{ rad.s}^{-1}$ , déterminons  $\vec{\sigma}_{G1/0}$  et l'angle  $\theta$  entre  $\vec{\omega}_{1/0}$  et  $\vec{\sigma}_{G1/0}$ .

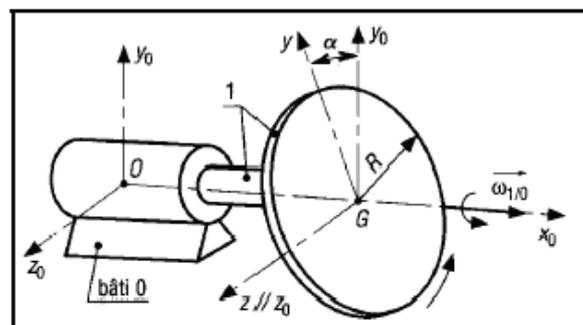


Fig. 14

### Résolution

$$J_{xx} = \frac{mR^2}{2} ; J_{yy} = J_{zz} = \frac{mR^2}{4} ; J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$$

$$[J_G]_{xyz} = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{4} \end{bmatrix} ; [\omega_{1/0}]_{xyz} = \begin{bmatrix} \omega \cos \alpha \\ -\omega \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$

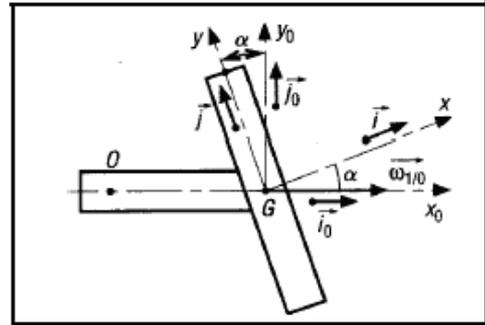


Fig. 15

Sachant que :  $\vec{i} = \cos \alpha \vec{i}_0 + \sin \alpha \vec{j}_0$  et  $\vec{j} = -\sin \alpha \vec{i}_0 + \cos \alpha \vec{j}_0$ , en remplaçant  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  dans  $\sigma_{G1/0}$ , on obtient l'écriture du vecteur par rapport aux axes  $(x_0, y_0, z_0)$ .

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{G1/0} &= \frac{mR^2 \omega}{4} [(2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) \vec{i}_0 + \sin \alpha \cos \alpha \vec{j}_0] \\ &= \frac{1 \times 0,15^2 \times 32}{4} [(2 \cos^2 20 + \sin^2 20) \vec{i}_0 + \sin 20 \cos 20 \vec{j}_0] \end{aligned}$$

$$\vec{\sigma}_{G1/0} = 0,339 \vec{i}_0 + 0,058 \vec{j}_0$$

$$\text{Angle } \theta : \cos \theta = \frac{\vec{\sigma}_G \times \vec{\omega}}{\sigma_G \times \omega} = \frac{0,3389 \times 32}{0,3439 \times 32} = 0,985 \quad \text{et} \quad \theta = 9,8^\circ$$

**Remarques :** en général  $\vec{\sigma}_A$  et  $\vec{\omega}$  n'ont pas la même direction.  
 $\vec{\sigma}_0 = \vec{\sigma}_G + OG \wedge m \vec{V}_{G1/0} = \vec{\sigma}_G + OG \wedge 0 = \vec{\sigma}_G$

## 4. Torseur cinétique

En prenant pour résultante cinétique la quantité de mouvement  $\vec{p}_{1/0} = m \vec{V}_{G1/0}$  et comme moment le moment cinétique  $\vec{\sigma}$ , l'ensemble des deux grandeurs a les propriétés d'un torseur appelé torseur cinétique. Notation :

$$[C_{1/0}]_B = \left\{ \begin{array}{l} m \vec{V}_{G1/0} \\ \vec{\sigma}_{B1/0} \end{array} \right\} \quad \text{avec : } \vec{\sigma}_B = \vec{\sigma}_A + \vec{BA} \wedge m \vec{V}_A = \vec{\sigma}_G + \vec{BG} \wedge m \vec{V}_G$$

# VI - Principe fondamental de la dynamique

## 1. Enoncé - Equations de mouvement

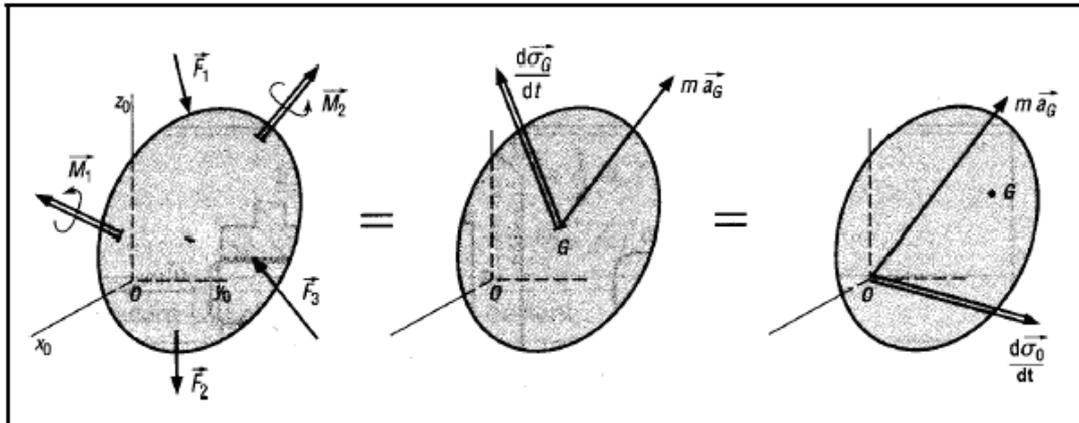


Fig. 16

$$\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = m \vec{a}_G = \frac{d}{dt} (m \vec{V}_G) = \left( \frac{d\vec{P}}{dt} \right)$$

$$\Sigma \overrightarrow{M}_G(\vec{F}_{\text{ext}}) = \overrightarrow{M}_G(\vec{F}_1) + \dots + \overrightarrow{M}_G(\vec{F}_n) + \vec{M}_1 + \dots + \vec{M}_n = \left( \frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} \right)$$

Équation alternative avec 0, point fixe du repère de référence :

$$\Sigma \overrightarrow{M}_0(\vec{F}_{\text{ext}}) = \overrightarrow{M}_0(\vec{F}_1) + \dots + \overrightarrow{M}_0(\vec{F}_n) + \vec{M}_1 + \dots + \vec{M}_n = \left( \frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} \right)$$

$\vec{a}_G$  est l'accélération du centre de gravité G ;  $F_1, F_2, \dots, F_n$  sont les forces extérieures agissant sur le solide isolé et  $M_1, M_2, \dots, M_n$  les couples purs ;  $(d\vec{\sigma}_G/dt)$  est la dérivée par rapport au temps du moment cinétique en G.

**Remarque :**  $\left( \frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} \right) = [J_G] \left[ \frac{d\vec{\omega}}{dt} \right] + \vec{\omega} \wedge \vec{\sigma}_G$

Cette relation est obtenue avec la formule de dérivation dans deux repères différents (voir chapitre « cinématique ») :

$$\left( \frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} \right)_{x_0y_0z_0} = \left( \frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} \right)_{xyz} + \vec{\omega}_{xyz/x_0y_0z_0} \wedge \vec{\sigma}_G = \frac{d}{dt} ([J_G][\omega]) + \vec{\omega} \wedge \vec{\sigma}_G$$

## 2. Cas 1 : solide en translation dans l'espace

Il n'y a pas de rotation du solide,  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{1/0} = \vec{0}$ . Les axes du repère de référence  $R_0$  et du repère  $R$  lié au solide sont constamment parallèles entre eux. Le principe fondamental se réduit à :

$$\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = m \vec{a}_G$$

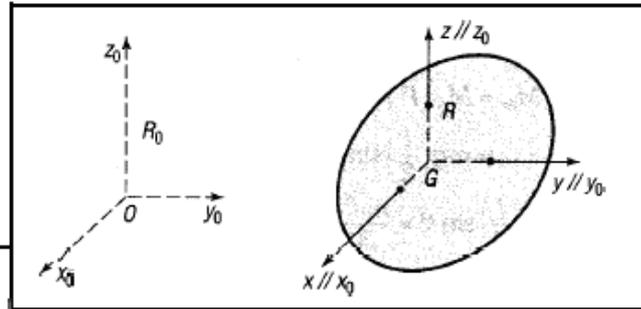


Fig. 17

L'application donne trois équations de projection scalaire.

## 3. Cas 2 : solide en rotation autour du centre de gravité G

Supposons que les axes  $(x, y, z)$  liés au solide sont aussi axes principaux d'inertie. Le moment cinétique en G s'écrit :  $\vec{\sigma}_G = J_x \omega_x \vec{i} + J_y \omega_y \vec{j} + J_z \omega_z \vec{k}$

L'équation de moment :

$$\Sigma \overrightarrow{M_G}(\vec{F}_{\text{ext}}) = \left( \frac{d \vec{\sigma}_G}{dt} \right) = [J_G] \left[ \frac{d \vec{\omega}}{dt} \right] + \vec{\omega} \wedge \vec{\sigma}_G$$

donne trois équations de projection scalaire, encore appelées équations d'Euler.

$\begin{aligned} \Sigma M_{Gx} &= J_x \dot{\omega}_x - (J_y - J_z) \omega_y \omega_z \\ \Sigma M_{Gy} &= J_y \dot{\omega}_y - (J_z - J_x) \omega_z \omega_x \\ \Sigma M_{Gz} &= J_z \dot{\omega}_z - (J_x - J_y) \omega_x \omega_y \end{aligned}$	$\dot{\omega}_x = \frac{d\omega_x}{dt} \quad ; \quad \dot{\omega}_y = \frac{d\omega_y}{dt} \quad ; \quad \dot{\omega}_z = \frac{d\omega_z}{dt}$
---	---

**Remarques** : les équations d'Euler peuvent également être utilisées lorsque le solide a un point fixe A ( $\vec{V}_{A1/0} = \vec{0}$ ).

Il suffit de remplacer G par A et  $[J_G]$  par  $[J_A]$ .

$$\Sigma \overrightarrow{M_A}(\vec{F}_{\text{ext}}) = \left( \frac{d \vec{\sigma}_A}{dt} \right) = [J_A] \left[ \frac{d \vec{\omega}}{dt} \right] + \vec{\omega} \wedge \vec{\sigma}_A$$

### Exemple

Une barre 2, de longueur  $AB = l = 0,6$  m, de masse  $m = 5$  kg, est entraînée en A, pivot d'axe (A, z), par un arbre (1) tournant à la vitesse  $\vec{\omega}_{1/0} = \omega \vec{y}_0$  par rapport à un bâti 0. Déterminons la valeur de  $\omega$  lorsque  $\theta = 30^\circ$ .

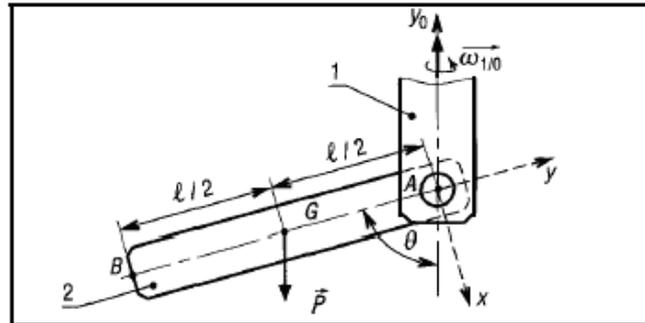


Fig. 18

### Résolution

$$\vec{\omega} = -\omega \sin \theta \vec{i} + \omega \cos \theta \vec{j} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j}$$

Si les dimensions transversales de la barre 2 sont négligées :

$$J_x = J_z = \frac{m \ell^2}{3} \quad ; \quad J_y = J_{yy} = J_{zz} = J_{xx} = 0$$

Les équations d'Euler se réduisent à :

$$\begin{aligned} \Sigma M_{Az} = M_A(\vec{P}) &= J_z \dot{\omega}_z - (J_x - J_y) \omega_x \omega_y \\ &= mg \left( \frac{l}{2} \right) \sin \theta = 0 - \left( \frac{m \ell^2}{3} - 0 \right) (-\omega \sin \theta) (\omega \cos \theta) \end{aligned}$$

$$mg \left( \frac{l}{2} \right) \sin \theta = \frac{m \ell^2}{3} \omega^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\text{d'où } \omega = \sqrt{\frac{3g}{2l \cos \theta}} = \sqrt{\frac{3 \times 9,81}{2 \times 0,6 \times \cos 30^\circ}} = 5,32 \text{ rad.s}^{-1}$$

## 4. Cas 3 : solide en rotation par rapport à un axe fixe (G, z)

$\vec{\omega}_{1/0} = \omega \vec{k}$  ; posons  $\dot{\omega}_z = \alpha$  = accélération angulaire du solide ; les axes (x, y, z) liés au solide ne sont pas principaux d'inertie.

L'équation de moment  $\Sigma \overline{M_G}(\vec{F}_{ext}) = \left( \frac{d \vec{\sigma}_G}{dt} \right)$  devient :

$$\begin{aligned} \Sigma M_{Gx} &= -J_{xz} \dot{\omega}_z + J_{yz} \omega_z^2 = -J_{xz} \alpha + J_{yz} \omega^2 \\ \Sigma M_{Gy} &= -J_{yz} \dot{\omega}_z - J_{xz} \omega_z^2 = -J_{yz} \alpha - J_{xz} \omega^2 \\ \Sigma M_{Gz} &= J_{zz} \dot{\omega}_z = J_{zz} \alpha \end{aligned}$$

**Remarque 1** : dans le cas des mouvements plans (x, y), les solides sont supposés plats. Il en résulte que  $J_{yz} = J_{xz} = 0$  et les équations se réduisent à  $\Sigma M_{Gz} = J_{zz} \alpha = J_G \alpha$ .

## 5. Cas 4 : solide en rotation d'axe $(A, \mathbf{z})$ par rapport à un repère intermédiaire $(A, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ ou mouvement de toupie

Une application importante de ce paragraphe concerne les gyroscopes et les mouvements gyroscopiques.

Les axes  $(x, y, z)$  sont axes principaux d'inertie du solide (2). (1) indique le repère intermédiaire  $(A, x, y, z)$  et (0) le repère de référence  $(A, x_0, y_0, z_0)$ .

Le solide tourne à la vitesse  $\vec{\omega}_{2/1} = \omega_{z/1} \vec{z}$  autour de l'axe  $z$ .

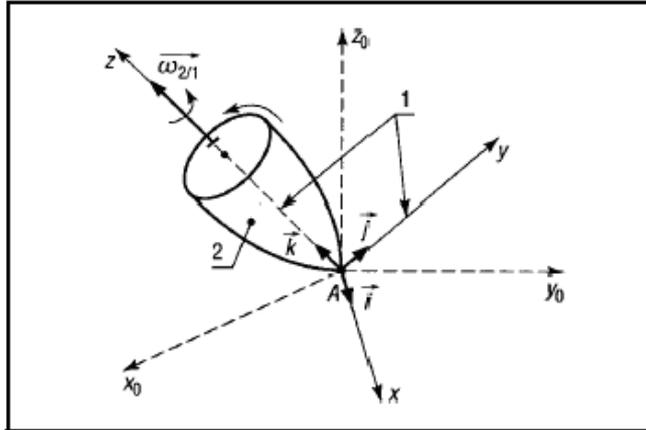


Fig. 19

$$\vec{\omega}_{2/0} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

$$\vec{\omega}_{1/0} = \Omega_x \vec{i} + \Omega_y \vec{j} + \Omega_z \vec{k}$$

$$\vec{\sigma}_A = J_x \omega_x \vec{i} + J_y \omega_y \vec{j} + J_z \omega_z \vec{k}$$

$$\left( \frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} \right)_{x_0y_0z_0} = \left( \frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} \right)_{xyz} + \vec{\omega}_{xyz} \wedge \vec{\sigma}_A = \left( \frac{d\vec{\sigma}_A}{dt} \right)_{xyz} + \vec{\omega}_{1/0} \wedge \vec{\sigma}_A$$

Les équations d'Euler s'écrivent sous la forme :

$$\Sigma M_{Ax} = J_x \dot{\omega}_x - J_y \Omega_z \omega_y + J_z \Omega_y \omega_z$$

$$\Sigma M_{Ay} = J_y \dot{\omega}_y - J_z \Omega_x \omega_z + J_x \Omega_z \omega_x$$

$$\Sigma M_{Az} = J_z \dot{\omega}_z - J_x \Omega_y \omega_x + J_y \Omega_x \omega_y$$

# VII. Énergie cinétique $E_k$ ou $T$

## 1. Définition 1

L'énergie cinétique d'un solide (1) en mouvement par rapport au repère de référence (0) est égale à la somme des énergies cinétiques  $m \overrightarrow{V}_{M1/0}^2$  ou  $\overrightarrow{V}_{M1/0}^2 dm$  de l'ensemble des points matériels  $M$  constituant le solide.

$$E_{k1/0} = T_{1/0} = \frac{1}{2} \sum_{\forall M} m_i \overrightarrow{V}_{M1/0}^2 = \frac{1}{2} \int_S \overrightarrow{V}_{M1/0}^2 dm$$

En remplaçant  $\overrightarrow{V}_{M1/0} = \overrightarrow{V}_{G1/0} + \overrightarrow{\omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{GM}$  dans la définition, on obtient après calcul :

$$\begin{aligned} E_{k1/0} = T_{1/0} &= \frac{1}{2} m \overrightarrow{V}_{G1/0}^2 + \frac{1}{2} \overrightarrow{\omega}_{1/0} \times \overrightarrow{\sigma}_{G1/0} \\ &= \frac{1}{2} m \overrightarrow{V}_{G1/0}^2 + \frac{1}{2} \overrightarrow{\omega}_{1/0} [J_G][\omega_{1/0}] \end{aligned}$$

*Cette relation est connue sous le nom du Théorème de KOENIG*

## 2. Définition 2

L'énergie cinétique peut aussi être exprimée par le produit du torseur cinématique  $\{V_{1/0}\}$  par le torseur cinétique  $\{C_{1/0}\}$  du solide en n'importe quel point  $I$  choisi pour le calcul.

$$2 E_{k1/0} = 2 T_{1/0} = \{v_{1/0}\} \cdot \{C_{1/0}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{\omega}_{1/0} \\ \overrightarrow{V}_{I1/0} \end{Bmatrix}_I \cdot \begin{Bmatrix} m \overrightarrow{V}_{G1/0} \\ \overrightarrow{\sigma}_{I1/0} \end{Bmatrix}_I$$

en développant :  $2 E_{k1/0} = 2 T_{1/0} = \overrightarrow{\omega}_{1/0} \cdot \overrightarrow{\sigma}_{I1/0} + m \overrightarrow{V}_{G1/0} \cdot \overrightarrow{V}_{I1/0}$

**Remarques** : si  $I$  est confondu avec  $G$ , on retrouve la première formule. Si  $I$  est confondu avec  $A$ , point **fixe** du solide dans le repère de référence  $R_{0_0}$ , on obtient :

$$2 E_{k1/0} = 2 T_{1/0} = \overrightarrow{\omega}_{1/0} \cdot \overrightarrow{\sigma}_{A1/0} = \overrightarrow{\omega}_{1/0} [J_A][\omega_{1/0}] \text{ avec } A \text{ point fixe dans } R_{0_0}$$

### 3. Cas particuliers

#### a- Solide en translation rectiligne

Tous les points du solide se déplacent à la même vitesse :  $\vec{V} = \vec{V}_G = \vec{V}_M = \dots$

L'énergie cinétique d'un solide en translation rectiligne est égale à la moitié du produit de la masse  $m$  du solide par le carré de sa vitesse  $V$ .

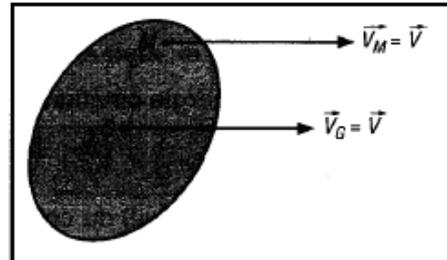


Fig. 20

$$E_k = T = \frac{1}{2} m V_G^2 \quad \text{avec} \quad E_k \text{ en J (joules) ; } m \text{ en kg ; } V \text{ en m.s}^{-1}$$

#### b- Solide en rotation par rapport à un axe fixe

Pour l'élément  $M$  de masse  $dm$  dont la vitesse est  $V_M = \omega r$ , l'énergie cinétique est  $E_i = \frac{1}{2}(\omega r)^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 dm$ .

Pour l'ensemble du solide :  $E_k = \frac{1}{2} \omega^2 \sum r^2 dm$ .

Le terme  $J = \sum r^2 dm$  représente le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation.

L'énergie cinétique d'un solide en rotation est égale à la moitié du produit du moment d'inertie  $J$  du solide (par rapport à son axe de rotation) par le carré de sa vitesse angulaire  $\omega$ .

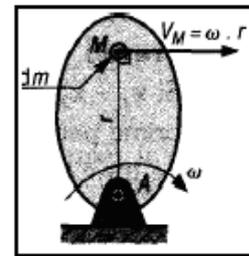


Fig. 21

$$E_k = T = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad \text{avec} \quad E_k \text{ en J (joules) ; } J \text{ en m}^2 \cdot \text{kg ; } \omega \text{ en rad.s}^{-1}$$

#### c- Solide en mouvement plan

$E_k$  (ou  $T$ ) : énergie cinétique en J (joules)

$$E_k = T = \frac{1}{2} m V_G^2 + \frac{1}{2} J_G \omega^2$$

$V_G$  : vitesse (absolue) du centre de gravité  $G$  du solide ( $\text{m.s}^{-1}$ )

$\omega$  : vitesse angulaire du solide ( $\text{rad.s}^{-1}$ )

$m$  : masse du solide (kg)

$J_G$  : moment d'inertie du solide par rapport à un axe perpendiculaire au plan du mouvement et passant par  $G$  ( $\text{m}^2 \cdot \text{kg}$ ).

# VIII - Théorèmes sur l'énergie

## 1- Travail (W)

Le travail ou l'énergie représente ce qu'il faut fournir globalement à un système pour l'amener d'un état initial à un état final. La manière dont le chemin est parcouru entre ces deux états n'a pas d'importance.

### a. Travail élémentaire $\Delta W$ d'une force $\vec{F}$

Le travail élémentaire  $\Delta W$  de la force  $\vec{F}$  dont le point d'application A se déplace de  $\vec{\Delta l}$  entre A et A' ( $\vec{\Delta l} = \vec{AA'}$ ) est égal au produit scalaire de  $\vec{F}$  par  $\vec{\Delta l}$ .

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta l} = F \cdot \Delta l \cdot \cos \theta$$

**Unités :** W en J (joules) ; F en N ;  $\Delta l$  en m.

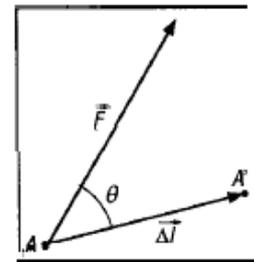


Fig. 22

#### Remarque

si  $0 \leq \theta < 90^\circ$  ;  $\cos \theta > 0$  ;  $\Delta W > 0$  ; le travail de  $\vec{F}$  est moteur ;

si  $\theta = 90^\circ$  ;  $\cos \theta = 0$  ;  $\Delta W = 0$  ; le travail de  $\vec{F}$  est nul ;

si  $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$  ;  $\cos \theta < 0$  ;  $\Delta W < 0$  ; le travail de  $\vec{F}$  est résistant.

#### Exemple : travail du vecteur poids $\vec{P}$

Prenons le cas d'un objet descendant une rampe de forme quelconque de  $G_1$  à  $G_2$

$$W_{1/2} = \vec{P} \cdot \vec{G_1 G_2} = P \cdot h$$

Quelle que soit la trajectoire de G, le travail de  $\vec{P}$  est égal au produit de P par la dénivellation h.

Supposons que l'objet soit un skieur de 80 kg

descendant une pente dont la différence de niveau est de 300 m entre le haut et le bas.

$W = 80 \times 9,81 \times 300 = 235\,440 \text{ J} = 235,4 \text{ kJ}$

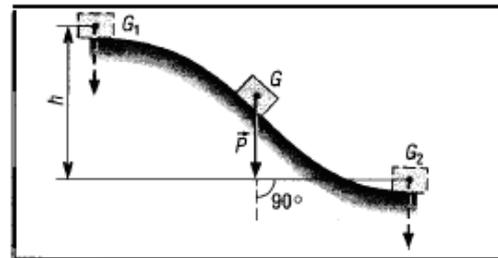


Fig. 23

s, abscisse curviligne, mesure le déplacement du point d'application A de la force F sur sa trajectoire,  $s = s_1$  en  $A_0$  et  $s = s_2$  en  $A_2$   
 $AA' = ds$  est le déplacement élémentaire de A ;  
 entre A et A' :

$$dW = \vec{F} \cdot \vec{ds} = F \cdot ds \cos \theta$$

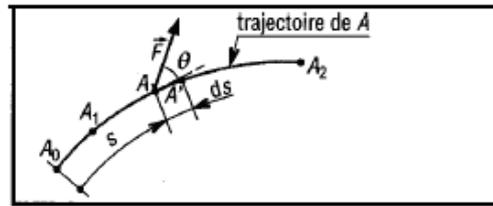


Fig. 24

entre  $A_0$  et  $A_2$  
$$W_{1/2} = \sum_{s_1}^{s_2} F \cdot ds \cdot \cos \theta = \int_{s_1}^{s_2} F \cdot \cos \theta \cdot ds$$

### b. Travail d'un couple C constant

Le travail d'un couple constant C se déplaçant de l'angle  $\theta$  est égal au produit de C par  $\theta$

$$W = C \theta$$

W en J (joules)  
 $\theta$  en rad (radian)  
 C en Nm

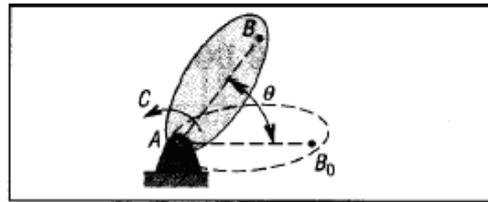


Fig. 25

### c. Cas des ressorts de torsion

Pour les ressorts de torsion (barre de torsion, cylindrique à spire et à spirale), le couple C supporté est fonction de l'angle d'enroulement  $\alpha$

$C = k \alpha$	$W = \frac{1}{2} C \alpha = \frac{1}{2} k \alpha^2$
C en Nm ; k en Nm.rad <sup>-1</sup> ; a en rad ; W en J	

**Remarque** : k est la raideur du ressort, W le travail réalisé est aussi de l'énergie potentielle stockée ou restituée par le ressort.

## 2. Notions de puissance (P)

La puissance définit la quantité de travail effectué par unité de temps (par seconde) ou autrement dit le débit d'énergie.

### a. Puissance moyenne

$$P_m = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

$P_m$  : puissance moyenne en W (watts)  
 $\Delta W$  : quantité de travail réalisé pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$  (J)  
 $\Delta t$  : intervalle de temps (s)

## b. Puissance instantanée

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta W}{\Delta t} \right) = \frac{dW}{dt}$$

Lorsque l'intervalle de temps  $\Delta t$  tend vers 0 ou devient très petit, la puissance moyenne tend vers la puissance instantanée.

Unités : le watt (W)

$$1 \text{ watt} = \frac{1 \text{ joule}}{1 \text{ seconde}} = 1 \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}$$

Autre unité usuelle : le cheval (cv)

$$1 \text{ cv} = 736 \text{ W}$$

## c. Puissance développée par une force $\vec{F}$

### Définition

La puissance instantanée  $P$  développée par une force  $\vec{F}$  dont le point d'application A se déplace à la vitesse  $\vec{V}$  sur sa trajectoire  $T_A$  est égale au produit scalaire de  $\vec{F}$  par  $\vec{V}$ .

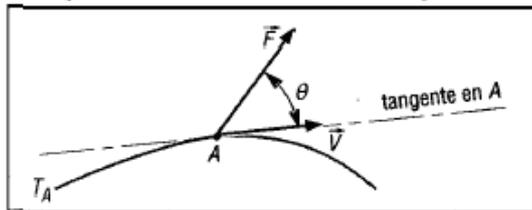


Fig. 26

$$P = \vec{F} \cdot \vec{V}$$
$$P = F \cdot V \cdot \cos \theta$$

$P$  en watts ;  $F$  en N ;  $V$  en  $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

## 3. Énergie potentielle ( $E_p$ )

Dans le cas d'un travail effectué par les forces de pesanteur ou par des forces engendrées par des ressorts, on parle d'énergie potentielle. Cette notion simplifie l'analyse des problèmes.

Pour ces cas, le travail réalisé est indépendant des trajectoires et dépend uniquement des positions initiale et finale des forces encore appelées forces conservatives.

### a. Énergie potentielle de pesanteur

L'énergie potentielle dépend de l'altitude  $z$  de l'objet, plus l'objet est *haut* et plus il y a d'énergie potentielle.

$$E_p = mgz$$

$$E_{p1} - E_{p2} = mg(z_1 - z_2) = mgh$$

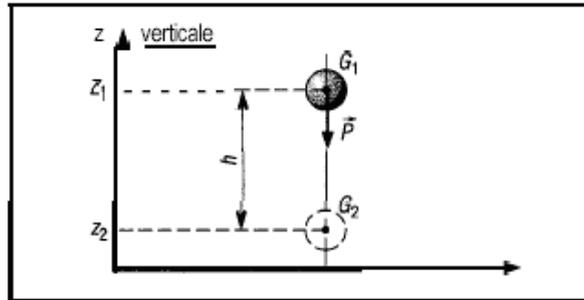


Fig. 27

### b. Énergie potentielle élastique (ressort)

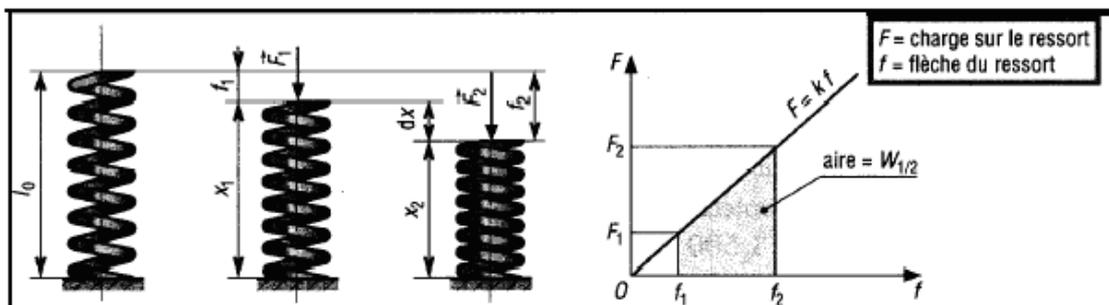


Fig. 28

$$E_p = \frac{k f^2}{2} \quad ; \quad E_{p2} - E_{p1} = \frac{k}{2} (f_2^2 - f_1^2)$$

$$f = (l_0 - x)$$

## 4. Théorème de l'énergie cinétique

Le théorème traduit sous forme énergétique les équations du principe fondamental de la dynamique. Il permet de déterminer des efforts dynamiques sans avoir à calculer les accélérations mises en jeu.

**Remarque** : en pratique, l'application du théorème aboutit à une seule équation, alors que le principe fondamental conduit à trois équations de projection (dans le plan).

**Énoncé 1** : Pour un solide isolé, le travail des forces extérieures pendant un intervalle de temps, est égal à la variation de l'énergie cinétique du solide.

$$T_2 - T_1 = [\Delta T]_1^2 = [W(\Sigma F_{\text{ext}})]_1^2$$

Translation rectiligne :  $\frac{m}{2} (V_2^2 - V_1^2) = [W(F_{\text{ext}})]_1^2$

Rotation d'axe fixe :  $\frac{J}{2} (\omega_2^2 - \omega_1^2) = [W(F_{\text{ext}})]_1^2$

Mouvement plan :  $\frac{m}{2} (V_{G2}^2 - V_{G1}^2) + \frac{J_G}{2} (\omega_2^2 - \omega_1^2) = [W(F_{\text{ext}})]_1^2$

**Énoncé 2** : pour un solide isolé, la dérivée de l'énergie cinétique est égale à la puissance développée par les forces extérieures.

$$\frac{dT}{dt} = P(\Sigma F_{\text{ext}})$$

### Exemple

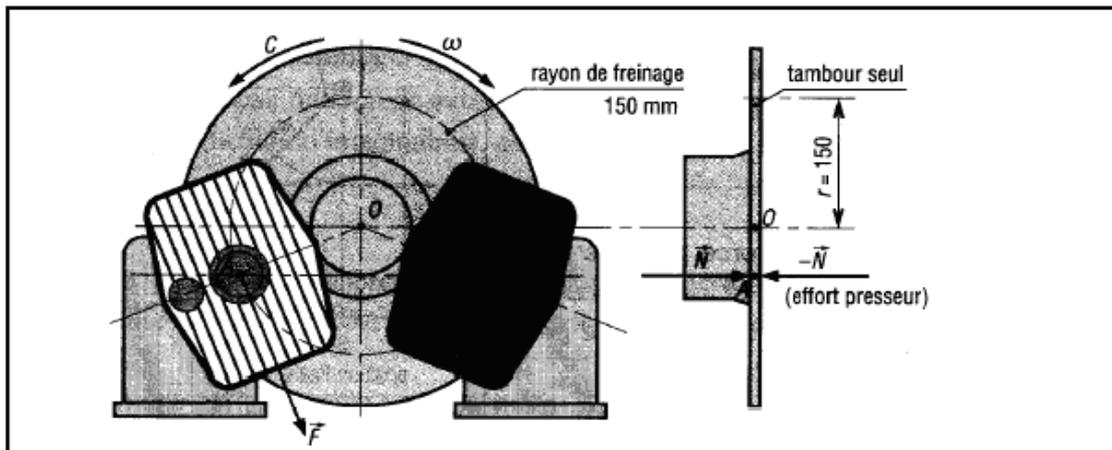


Fig. 29

Un tambour ( $J = 100 \text{ m}^2 \cdot \text{kg}$  par rapport à son axe de rotation) tourne à la vitesse de  $20 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  ( $\approx 200 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}$ ). Le freinage est réalisé en 6 secondes pendant 3 tours. Déterminons le couple de freinage  $C$  si celui-ci est supposé constant.

### Résolution

La variation d'énergie cinétique du tambour en rotation est :

$$T_2 - T_1 = \frac{J}{2} (\omega_2^2 - \omega_1^2) = \frac{100}{2} (0 - 20^2) = -20 \text{ kJ}$$

La seule action extérieure fournissant un travail (résistant) au tambour isolé est le couple de freinage C. Toutes les autres actions (poids, actions des paliers) passent par l'axe de rotation et, de ce fait, ne produisent aucun travail.

$$[W(F_{\text{ext}})]_1^2 = -C\theta = -C \times 2\pi \times 3 \text{ (travail résistant)}$$

$$\text{Théorème : } [\Delta T]_1^2 = -20\,000 \text{ J} = [W(F_{\text{ext}})]_1^2 = -6\pi C \text{ d'où } C = 1\,061 \text{ Nm}$$

**Remarque** : on a deux jeux de plaquettes de frein, il en résulte que :

$$F = \frac{C}{2r} = \frac{1\,061}{2 \times 0,15} = 3537 \text{ N}$$

## 2. Loi de conservation de l'énergie

**Loi** : pour un solide ou un système énergétiquement isolé et dont les forces dépendent d'une énergie potentielle ( $E_p$  : forces de pesanteur, actions exercées par des ressorts), l'énergie mécanique totale mise en jeu reste constante entre deux instants successifs.

$$\begin{aligned} \text{Énergie mécanique totale } T + E_p &= \text{constante} \\ \text{ou } T_2 + E_{p2} &= T_1 + E_{p1} = \text{constante} \end{aligned}$$

La loi de conservation de l'énergie est un cas particulier (intégrale première) du théorème précédent, obéissant à un certain nombre de conditions.

**Remarque** : un système est énergétiquement isolé s'il n'échange aucune énergie avec son milieu extérieur, pas de pertes par frottement, etc.

### Exemple 1

Un pendule simple de poids  $\overline{mg}$  est lâché sans vitesse initiale à partir de l'horizontale ( $AG_1$ ). Déterminons la vitesse  $V_2$  en position verticale.

### Résolution

Le poids est la seule force produisant un travail, la tension  $\vec{T}$  du fil (perpendiculaire à la vitesse  $V_G$ ) n'en produit pas. Le pendule n'échange pas d'énergie.

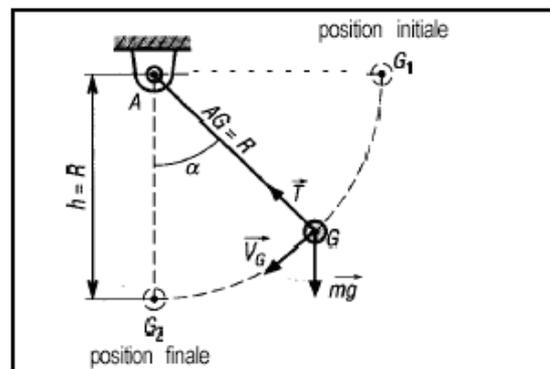


Fig. 30

$T_2 + E_{p2} = T_1 + E_{p1}$  donne :

$$\frac{mV_2^2}{2} + mgz_2 = \frac{mV_1^2}{2} + mgz_1 \quad \text{avec } V_1 = 0 \quad \text{et} \quad z_1 - z_2 = h = R$$

On obtient :  $\frac{mV_2^2}{2} = mg(z_1 - z_2)$  e t  $V_2 = \sqrt{2gh}$

### Exemple 2

Un wagonnet, de masse  $m = 250$  kg, roulant à la vitesse uniforme de  $1,4 \text{ m.s}^{-1}$  est arrêté par un amortisseur à ressort. Si la course  $C$  d'amortissement est de  $100 \text{ mm}$ , déterminons l'énergie échangée et l'effort supporté par le ressort en fin de course.

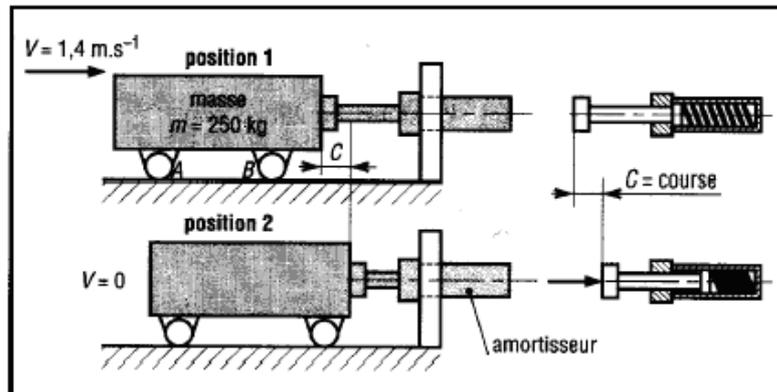


Fig. 31

### Résolution

Le wagonnet est soumis à l'action de 4 forces extérieures : poids  $\vec{P}$ ,  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$  actions des essieux et  $\vec{F}$  l'action du ressort.  $\vec{P}$ ,  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$ , perpendiculaires aux trajectoires des points  $A$ ,  $B$  et  $G$  ne fournissent aucun travail. Seule  $\vec{F}$  produit un travail résistant.

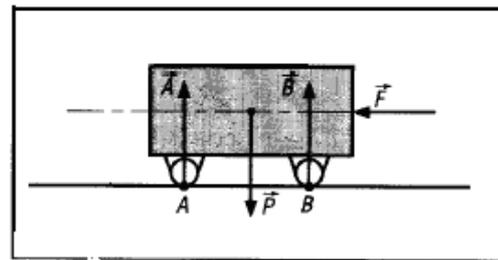


Fig. 32

Loi :  $T_2 - T_1 = E_{p1} - E_{p2} = - \frac{kC^2}{2} =$  [variation d'énergie potentielle du ressort]

$$\frac{1}{2} m (V_2^2 - V_1^2) = \frac{250}{2} (0 - 1,4^2) = - \frac{k \times 0,1^2}{2} \quad \text{d'où} \quad k = 49\,000 \text{ N.m}^{-1}$$

$F_1 = 0$  en position 1 (ressort non chargé) ;

$F_2 = KC = 49\,000 \times 0,1 = 4\,900 \text{ N}$  en position 2.

Énergie échangée :  $\frac{250}{2} \times 1,4^2 = \frac{49\,000 \times 0,1^2}{2} = 2455$

# IX - Équilibrage des solides en rotation

## 1. Définitions

Un solide est équilibré statiquement si son centre de gravité  $G$  est situé sur l'axe de rotation.

Un solide est équilibré dynamiquement si son axe de rotation est axe principal d'inertie du solide.

**Remarque** : si  $z$  est axe principal d'inertie  $J_{xz} = J_{yz} = 0$ , les équations générales se réduisent à  $\Sigma M_{Gx} = \Sigma M_{Gy} = 0$  et  $\Sigma M_{Gz} = J_{zz} a$ .

L'équilibrage peut être obtenu en ajoutant des masses au solide (exemple : équilibrage des roues d'automobile) ou en retirant de la matière par perçage (exemple : certains rotors de moteurs).

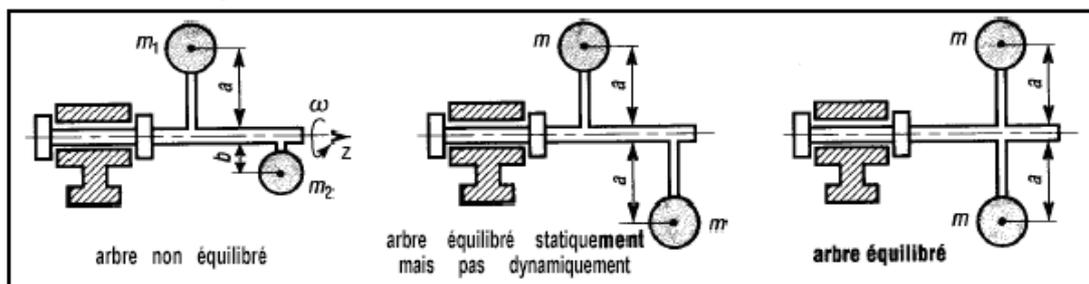


Fig. 33

## 2, Équilibrage au moyen de deux masses $m_1$ et $m_2$

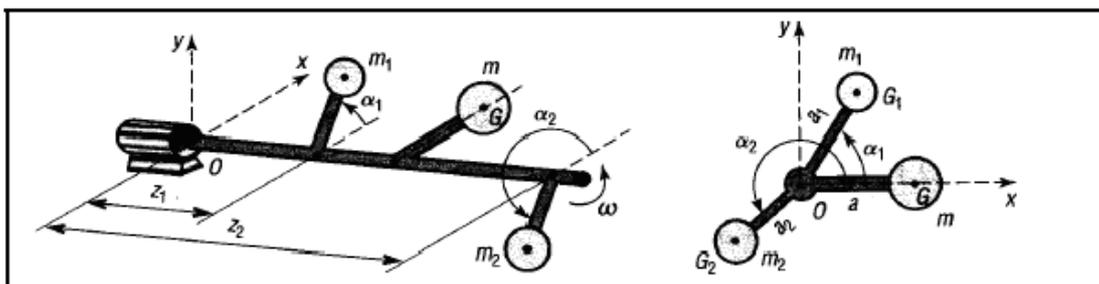


Fig. 34

L'arbre de centre de gravité  $G$  (situé à la distance  $a$  de l'axe) et de masse  $m$  est équilibré au moyen des deux masses  $m_1$  et  $m_2$

a) **Équilibrage statique**

$$\frac{m \overrightarrow{QG} + m_1 \overrightarrow{OG_1} + m_2 \overrightarrow{OG_2}}{m_1 + m_2 + m} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \text{sur } x : ma + m_1 a_1 \cos \alpha_1 + m_2 a_2 \cos \alpha_2 = 0 \quad (1) \\ \text{sur } y : m_1 a_1 \sin \alpha_1 + m_2 a_2 \sin \alpha_2 = 0 \quad (2) \end{array}$$

b) **Équilibrage dynamique**

L'équilibrage dynamique n'est possible qu'avec deux masses (une seule ne peut suffire). Les produits d'inertie de l'ensemble en rotation doivent être nuls.

$$J_{yz}(\text{ensemble}) = J_{yz}(\text{arbre}) + m_1 a_1 \sin \alpha_1 z_1 + m_2 a_2 \sin \alpha_2 z_2 = 0 \quad (3)$$

$$J_{xz}(\text{ensemble}) = J_{xz}(\text{arbre}) + m_1 a_1 \cos \alpha_1 z_1 + m_2 a_2 \cos \alpha_2 z_2 = 0 \quad (4)$$

c) **Résolution**

On dispose de 4 équations pour 8 inconnues  $(a_1, a_2, z_1, z_2, \alpha_1, \alpha_2, m_1, m_2)$ . En pratique, on se fixe 4 inconnues qui deviennent des paramètres. Par exemple, pour l'équilibrage d'une roue d'automobile,  $a_1 = a_2 =$  rayon de jante et  $z_2 = z_1 =$  largeur de la jante et on obtient :

$$(1) + (4) \text{ donne : } m_1 a_1 \cos \alpha_1 (z_2 - z_1) = J_{xz} = m a z_2$$

$$(2) + (3) \text{ donne : } m_1 a_1 \sin \alpha_1 (z_2 - z_1) = J_{yz}$$

d'où : 
$$\boxed{\tan \alpha_1 = \frac{J_{yz}}{J_{xz} - m a z_2}}$$

# PRINCIPE DES TRAVAUX VIRTUELS

## EQUATIONS DE LAGRANGE

### OBJECTIFS

- Définir la notion du déplacement virtuel compatible avec une liaison et le travail virtuel associé
- Donner les différents types de liaisons
- Enoncer les principe des travaux virtuels
- Etablir les équations de LAGRANGE

## I- Principe du travail virtuel

### 1. Déplacement virtuel

On appelle déplacement virtuel (fictif ou imaginaire) d'un système, tout déplacement infiniment petit des particules de ce système, compatible à l'instant  $t$  donné, avec les forces et les liaisons imposées à ce système

Soit  $\vec{r}_i$  le vecteur position de la particule  $i$  du système. Supposons  $\vec{r}_i$  fonction de  $n$  paramètres qui décrivent la position du système et éventuellement  $t$ .

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

Les paramètres  $q_i$  sont appelés coordonnées généralisées.

Le déplacement réel de la particule  $i$  pendant l'intervalle du temps  $dt$  s'écrit :

$$d\vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} dq_n + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt$$

Le déplacement virtuel de la particule  $i$  pendant l'intervalle du temps  $dt$  s'écrit :

$$\delta \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} \delta q_n$$

Le temps  $n$ 'intervient pas dans le déplacement virtuel car la transformation est une transformation géométrique à l'instant  $t$ .

## 2. Liaisons imposées au système

Nous avons classé les liaisons en deux catégories principales suivant la nature des équations qui s'y rapportent

### a) Liaisons holonomes

Supposons leur nombre égal à  $h$ , elles sont de la forme

$$h \text{ relations } \left\{ \begin{array}{l} f_1 (q_1 \dots q_i \dots q_n, t) = 0 \\ f_j (q_1 \dots q_i \dots q_n, t) = 0 \\ f_h (q_1 \dots q_i \dots q_n, t) = 0 \end{array} \right.$$

### b) Liaisons non holonomes

Supposons leur nombre égal à  $l$ . Elles sont de la forme

$$l \text{ relations } \left\{ \begin{array}{l} a_{11}\dot{q}_1 + \dots + a_{1i}\dot{q}_i \dots + a_{1n}\dot{q}_n = b_1 \\ a_{j1}\dot{q}_1 + \dots + a_{ji}\dot{q}_i \dots + a_{jn}\dot{q}_n = b_j \\ a_{l1}\dot{q}_1 + \dots + a_{li}\dot{q}_i \dots + a_{ln}\dot{q}_n = b_l \end{array} \right.$$

Le degré de liberté formel est donc  $k = n - (h + l)$

Les liaisons peuvent dépendre ou non du temps. On emploie parfois en mécanique analytique le langage suivant :

- le système est dit *skléronome* lorsque le temps ne figure pas explicitement dans les équations de liaison
- le système est dit *rhéonome* lorsque le temps figure explicitement dans les équations de liaison.

*La distribution entre liaisons holonomes et liaisons non holonomes tient une grande place dans la théorie des équations de LAGRANGE.*

Les liaisons holonomes peuvent se mettre sous la forme

$$\frac{\partial f_j}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \dots + \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \dot{q}_i + \dots + \frac{\partial f_j}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial f_j}{\partial t} = 0 \quad j = 1 \dots h$$

elles ont la même forme que les liaisons non holonomes

$$a_{j1} \dot{q}_1 + \dots + a_{ji} \dot{q}_i + \dots + a_{jn} \dot{q}_n - b_j = 0 \quad j = 1 \dots l$$

on appelle *déplacements* virtuels compatibles les *déplacements* virtuels vérifiant les équations précédentes en faisant

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} = 0 \quad b_j = 0 \quad \text{soit}$$

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \delta q_i + \dots + \frac{\partial f_j}{\partial q_n} \delta q_n = 0 \quad j = 1, \dots, h$$

$$a_{j1} \delta q_1 + \dots + a_{ji} \delta q_i + \dots + a_{jn} \delta q_n = 0 \quad j = 1, \dots, l$$

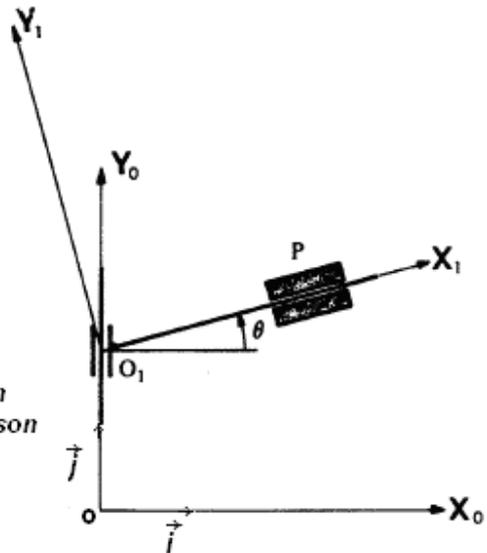
### Exemple

Un point matériel P peut se déplacer sur une droite (D)  $(O_1, \vec{X}_1)$  telle que  $O_1 \in (D)$  se déplace sur  $(O, \vec{Y}_0)$  de manière que

$$\vec{OO}_1 = \frac{1}{2} \gamma t^2 \vec{j}$$

Déterminer:

- 1- L'équation et le type de la liaison
- 2- Le vecteur position compatible avec la liaison
- 3- Le déplacement réel compatible avec la liaison
- 4- Le déplacement virtuel compatible avec la liaison



$$O\vec{P} = x\vec{i} + y\vec{j} = O\vec{O}_1 + O_1\vec{P}$$

L'équation de la liaison s'écrit :

$$y = \frac{1}{2} \gamma t^2 + \text{tg} \theta . x$$

qui se met sous la forme habituelle :

$$y - \frac{1}{2} \gamma t^2 + \text{tg} \theta . x = 0 \quad \text{ou} \quad f(x, y, \theta, t) = 0 \quad \text{c'est une liaison holonome.}$$

$$q_1 \equiv x \quad q_2 \equiv y \quad q_3 \equiv \theta$$

Le vecteur  $\vec{r} = O\vec{P}$  compatible avec la liaison s'écrit :

$$\vec{r} = x\vec{i} + \left( \frac{1}{2} \gamma t^2 + \text{tg} \theta . x \right) \vec{j} = \vec{r}(x, \theta, t)$$

Le déplacement réel compatible avec la liaison s'écrit :

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} dt = (\vec{i} + tg\theta \vec{j})dx + (1 + tg\theta^2)\vec{j} d\theta + \gamma \vec{j} dt$$

Le déplacement virtuel compatible s'écrit :

$$\delta \vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \delta \theta = (\vec{i} + tg\theta \vec{j})\delta x + (1 + tg\theta^2)\vec{j} \delta \theta$$

### 3. Travail virtuel

Pour un déplacement virtuel  $\delta \vec{r}_i$  de la particule  $i$ , le travail virtuel de la force  $\vec{F}_i$  appliquée à  $i$  s'écrit :  $\delta W = \vec{F}_i \delta \vec{r}_i$

### 4- Principe du travail virtuel

Soit (S) un système de  $N$  particules en mouvement dans un repère galiléen. La loi fondamentale pour une particule  $i$  de masse  $m_i$  appartenant au système (S) s'écrit :

$$\vec{F}_i = m_i \vec{\gamma}_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, N$$

$$\vec{F}_i \delta \vec{r}_i = m_i \vec{\gamma}_i \delta \vec{r}_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, N$$

d'où

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{\gamma}_i \delta \vec{r}_i$$

$\vec{F}_i$  est la résultante de toutes les forces (intérieures et extérieures) qui s'exercent sur la particule  $i$ .  $\vec{\gamma}_i$  étant l'accélération.

#### ENONCE

**Le travail virtuel développé par toutes les actions mécaniques dans une transformation virtuelle quelconque est égal au travail virtuel développé par les quantités d'accélération.**

La force  $\vec{F}_i$  peut avoir deux origines :

$$\vec{F}_i = \vec{F}_{li} + \vec{F}_{di}$$

Où  $\vec{F}_{di}$  : force mécanique donnée

$\vec{F}_{li}$  : force de liaison

Le travail virtuel des actions mécaniques s'écrit :  $\delta W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{di} \delta \vec{r}_i + \sum_{i=1}^N \vec{F}_{li} \delta \vec{r}_i$

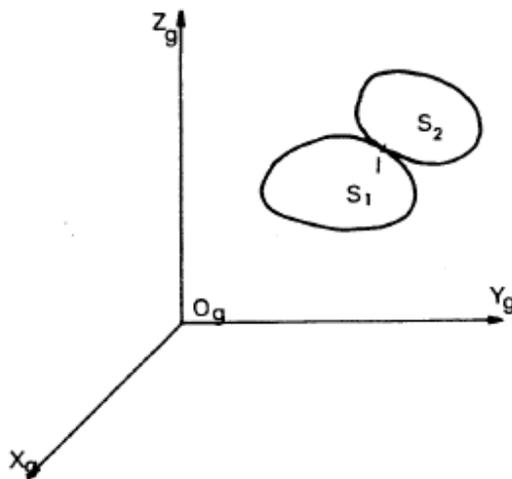
## Cas des liaisons parfaites

Une liaison est dite parfaite au sens de Gauss si le travail virtuel développée par les actions de liaison est nulle dans toute transformation virtuelle compatible avec les liaisons

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_{li} \delta \vec{r}_i = 0$$

Le travail virtuel s'écrit dans ce cas:  $\delta W = \sum_{i=1}^N \vec{F}_{di} \delta \vec{r}_i$

Exemple 1 : liaison intérieure et mouvement de rotation



le travail virtuel développé par les actions mécaniques de liaison est égal à

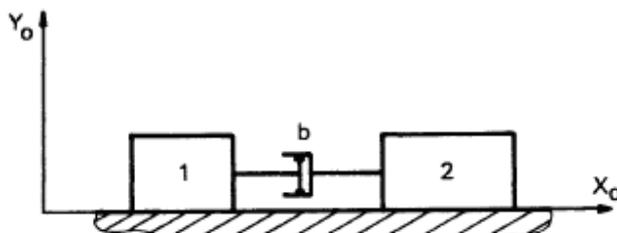
$$\delta W = \vec{F}_{12} \delta \vec{r}_2^1 = \vec{F}_{12} \vec{v}_2^1(I) \delta t$$

$\vec{F}_{12}$  est l'action de 1 sur 2,  $\vec{v}_2^1$  est la vitesse relative de 2 par rapport à 1

Si on respecte la liaison, la vitesse de glissement est situé dans le plan tangent, et le travail virtuel (liaison parfaite) est nul dans deux cas:

- $\vec{F}_{12}$  normal aux surfaces en contact (ce qui correspond à l'absence de frottement)
- $\vec{v}_2^1(I) = 0$  la transformation est un roulement sans glissement

Exemple 2 : liaison intérieure et mouvement de translation avec frottement visqueux



Par hypothèse l'action de 1 sur 2 est  $\vec{F}_{12} = -b \vec{V}_2^1$   
 (mouvement de translation : tous les points ont même vitesse)

$\vec{V}_2^1$  Vitesse relative de 2 par rapport à 1

le travail virtuel développé par les actions mécaniques de liaison est égal à

$$\delta W = \vec{F}_{12} \delta \vec{r}_2^1 \quad \delta \vec{r}_2^1 \text{ est le déplacement de 2 par rapport à 1}$$

$$\delta W = -b \vec{V}_2^1 \delta \vec{r}_2^1$$

Cette liaison n'est pas parfaite

### Cas d'un système en équilibre

Si le système est en équilibre ( $\vec{\gamma}_i = 0$ ), on obtient :

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \vec{\sigma}_i = 0$$

#### ENONCE

Le travail virtuel développé par toutes les actions mécaniques dans une transformation virtuelle quelconque est nul, pour un système en équilibre

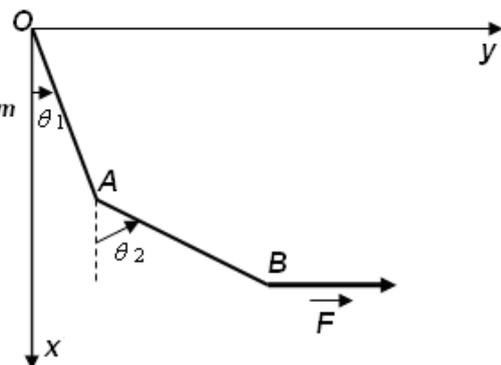
Pour un système en équilibre, l'énergie cinétique est nulle. Il en résulte que le travail des forces extérieures, en prenant en compte des petits déplacements virtuels est lui aussi nul.

#### Exemple d'un bi-pendule

OA et OB deux barres homogènes identiques de masse  $m$  et de longueur  $2l$  parfaitement articulées en O et en A

On exerce une force  $\vec{F}$  horizontale connue.

Etablir la position d'équilibre (calculer  $\theta_1$  et  $\theta_2$ )



Comme les liaisons sont parfaites en O et A, le travail virtuel des forces de liaison est nul. Le travail virtuel des actions mécaniques données est égal à :

$$\delta W = m\vec{g} \delta O\vec{G}_1 + m\vec{g} \delta O\vec{G}_2 + \vec{F} \delta O\vec{B} = mg(\delta Y_{G1} + \delta Y_{G2}) + F \delta X_B = 0$$

$G_1$  est le centre de gravité de la barre OA, il est situé au milieu de OA

$$Y_{G1} = l \cos \theta_1 \Rightarrow \delta Y_{G1} = -l \sin \theta_1 \delta \theta_1$$

$G_2$  est le centre de gravité de la barre AB,, il est situé au milieu de AB

$$Y_{G2} = 2l \cos \theta_1 + l \cos \theta_2 \Rightarrow \delta Y_{G2} = -2l \sin \theta_1 \delta \theta_1 - l \sin \theta_2 \delta \theta_2$$

$$X_B = 2l(\sin \theta_1 + \sin \theta_2) \Rightarrow \delta X_B = 2l(\cos \theta_1 \delta \theta_1 + \cos \theta_2 \delta \theta_2)$$

$$-mgl \sin \theta_1 \delta \theta_1 - mgl(2 \sin \theta_1 \delta \theta_1 + \sin \theta_2 \delta \theta_2) + 2Fl(\cos \theta_1 \delta \theta_1 + \cos \theta_2 \delta \theta_2) = 0 \quad \forall \theta_1, \theta_2$$

$$(-3mgl \sin \theta_1 + 2Fl \cos \theta_1) \delta \theta_1 + (-mgl \sin \theta_2 + 2Fl \cos \theta_2) \delta \theta_2 = 0 \quad \forall \theta_1, \theta_2$$

$$D'où \begin{cases} -3mgl \sin \theta_1 + 2Fl \cos \theta_1 = 0 \\ -mgl \sin \theta_2 + 2Fl \cos \theta_2 = 0 \end{cases} \text{ soit : } \begin{cases} \operatorname{tg} \theta_1 = \frac{2F}{3mg} \\ \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{2F}{mg} \end{cases}$$

## II - Equations de LAGRANGE

Les équations que nous allons obtenir ne sont pas de nouvelles équations, elles sont déduites de la loi fondamentale. Le but poursuivi par LAGRANGE est clairement formulé dans sa préface à la première édition : "on a déjà plusieurs Traités de Mécanique, mais le plan de celui-ci est entièrement neuf. Je me suis proposé de réduire la théorie de cette science et l'art de résoudre les problèmes qui s'y rapportent, à des formules générales dont le simple développement donne toutes les équations nécessaires pour la solution de chaque problème. J'espère que la manière dont j'ai tâché de remplir cet objectif ne laissera rien à désirer."

Soit un système de  $N$  particules. Soit  $\vec{r}_i$  le vecteur position de la particule  $i$  du système.

Supposons  $\vec{r}_i$  fonction de  $n$  paramètres qui décrivent la position du système et éventuellement  $t$ .

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t)$$

Le déplacement réel de la particule  $i$  pendant l'intervalle du temps  $dt$  s'écrit :

$$d\vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} dq_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} dq_n + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} dt$$

La vitesse de la particule  $i$  est égale à :

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \frac{dq_2}{dt} + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} \frac{dq_n}{dt} + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t}$$

Le déplacement virtuel de la particule  $i$  pendant l'intervalle du temps  $dt$  s'écrit :

$$\delta \vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} \delta q_n = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

Le travail virtuel développé par les actions mécaniques est égal à :

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j$$

$$Q_j = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \quad Q_j \text{ est appelé force généralisée.}$$

Le travail virtuel développé par les quantités d'accélération est égal à :

$$\sum_{i=1}^N m_i \bar{y}_i \delta \bar{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j$$

$$m_i \frac{d\bar{v}_i}{dt} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left( m_i \bar{v}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \bar{v}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right)$$

$$\text{or } \bar{v}_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial t} \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}$$

$$\frac{d}{dt} \left( m_i \bar{v}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{d}{dt} \left( m_i \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right]$$

$$m_i \bar{v}_i \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right) = m_i \bar{v}_i \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{d\bar{r}_i}{dt} \right) = m_i \bar{v}_i \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \bar{y}_i \delta \bar{r}_i &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right] \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^n \left[ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right] \delta q_j = \sum_{j=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j \end{aligned}$$

le PTV s'écrit:

$$\sum_{j=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j$$

### 1- EQUATIONS DE LAGRANGE POUR UN SYSTEME A PARAMETRES INDEPENDANTS

Si les paramètres  $q_j (j=1, \dots, n)$  sont indépendants, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

Si les forces  $\bar{F}_i$  dérivent d'un potentiel  $V$  (forces de pesanteur ou forces engendrées

par les ressorts) :  $\bar{F}_i = -\text{grad } V$ ,  $Q_j = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$

sachant que  $\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} = 0$  on obtient :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

$L = T - V$  est appelé le lagrangien du système.

## 2- LES PARAMETRES NE SONT PAS INDEPENDANTS MAIS LIES PAR DES RELATIONS DE LIAISON HOLONOMES OU NON HOLONOMES

Les relations de liaison peuvent se mettre sous la forme générale

$$(I) \quad \left. \begin{aligned} f_j(q_1 \dots q_i \dots q_n, t) &= 0 \\ a_{j1}\dot{q}_1 + \dots + a_{ji}\dot{q}_i + \dots + a_{jn}\dot{q}_n &= b_j \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} j = 1 \dots h \\ j = 1 \dots l \end{array}$$

Remarquons tout d'abord que si nous avons des liaisons de type holonome nous pourrions nous ramener immédiatement à l'étude que nous venons de faire.

Supposons en effet que les seules liaisons existantes soient du type :

$$f_j(q_1 \dots q_i \dots q_n, t) = 0 \quad j = 1 \dots h$$

on peut toujours tirer  $h$  paramètres en fonction des  $n-h$  autres, et alors se ramener à  $n-h$  paramètres indépendants. Donc du point de vue de la *théorie* il n'y a pas de difficulté nouvelle. Si l'on garde ces liaisons dans certains cas, c'est uniquement pour une *raison de commodité*.

Par contre, il en va tout autrement pour les liaisons du type non holonome,

$$a_{j1}\dot{q}_1 + \dots + a_{ji}\dot{q}_i + \dots + a_{jn}\dot{q}_n = b_j$$

car par hypothèse elles ne sont pas intégrables et par suite nous ne pouvons pas exprimer certains paramètres en fonction des autres grâce à ces relations.

Si nous conservons les liaisons non holonomes, c'est pour une question de principe et si nous conservons les liaisons holonomes c'est pour une question de commodité.

On a déjà vu que ces liaisons peuvent s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_j}{\partial t} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \delta q_i + \dots + \frac{\partial f_j}{\partial q_n} \delta q_n &= 0 & j = 1, \dots, h \\ a_{j1} \delta q_1 + \dots + a_{ji} \delta q_i + \dots + a_{jn} \delta q_n &= 0 & j = 1, \dots, l \end{aligned}$$

Remarque : ce système peut se mettre sous la forme unique

$$\left. \begin{array}{l} j = 1 \dots m \\ m = h + 1 \end{array} \right\} \left\{ a_{j1} \delta q_1 + \dots + a_{ji} \delta q_i + \dots + a_{jn} \delta q_n = 0 \right\}$$

du point de vue mathématique ce sont des équations linéaires en  $\delta q_j$

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} \delta q_i = 0 \quad j=1,2,\dots,m \quad \text{ou en permutant les indices } i \text{ et } j \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} \delta q_j = 0 \quad i=1,2,\dots,m$$

En introduisant les multiplicateurs de Lagrange  $\lambda_i$ , le PTV s'écrit :

$$\sum_{j=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j + \sum_{i=1}^m \lambda_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \delta q_j = 0$$

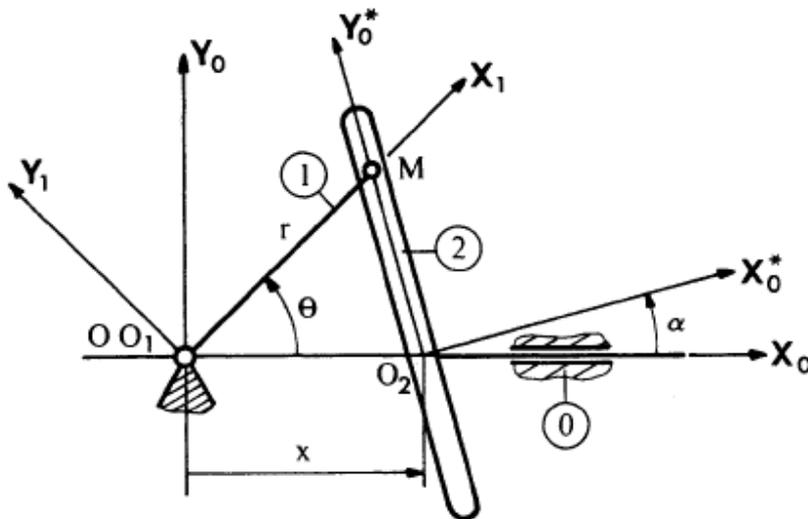
$$\sum_{j=1}^n \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right) = \sum_{i=1}^m Q_j \delta q_j + \sum_{j=i=1}^n \sum_{j=i=1}^m \lambda_i a_{ij} \delta q_j = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j + \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij}$$

Si les forces  $\vec{F}_i$  dérivent d'un potentiel  $V$ , l'équation précédente s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_{ij}$$

Exemple (système holonome)



- on applique à la manivelle (1) un torseur  $[T_1] : \begin{cases} \vec{F}_1 = 0 \\ \vec{M}_1(O) = C \vec{z}_0 \end{cases}$
- on applique à la coulisse (2) un torseur  $[T_2] : \begin{cases} \vec{F}_2 = F_2 \vec{X}_0 \\ \vec{M}_2(O_2) = 0 \end{cases}$

on demande de trouver l'équation du mouvement sachant que les liaisons sont parfaites.

a) Equation de liaison

Pour repérer le mouvement on emploie les paramètres  $x$  et  $\theta$ . Mais ils ne sont pas indépendants, ils sont liés par la relation :

$$x - r \frac{\cos(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} = 0 \quad (1)$$

Elle est de type holonome.

b) Equation du mouvement en se ramenant à un paramètre

α) énergie cinétique

$$\begin{aligned} T^\circ &= T_1 + T_2 \\ T^\circ &= \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}^2 \end{aligned}$$

$I_1$  désignant le moment d'inertie de  $(S_1)$  par rapport à  $O, \vec{z}_0$  et  $M$  la masse de  $(S_2)$ .

$$\text{D'après (1)} \quad \dot{x} = -r \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} \dot{\theta}$$

$$T^\circ = \frac{1}{2} \left[ I_1 + M r^2 \left( \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} \right)^2 \right] \dot{\theta}^2$$

β) travail virtuel

Les liaisons étant parfaites et la transformation compatible, le travail virtuel des seules actions données

$$\delta W = M_1 \delta \theta + F_2 \delta x$$

$$\delta x = -r \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} \delta \theta \quad \text{dans une transformation compatible}$$

$$\delta W = \left[ M_1 - F_2 \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} \right] \delta \theta \quad \text{de la forme} \quad \delta W = Q_\theta \delta \theta$$

équation de LAGRANGE

Il y a un paramètre indépendant :  $\theta$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \left[ I_1 + M \frac{r^2}{\cos^2 \alpha} \sin^2(\theta - \alpha) \right] \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \left[ I_1 + M \frac{r^2}{\cos^2 \alpha} \sin^2(\theta - \alpha) \right] \ddot{\theta} + 2 M \frac{r^2}{\cos^2 \alpha} \sin(\theta - \alpha) \cos(\theta - \alpha) \dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = M \frac{r^2}{\cos^2 \alpha} \sin(\theta - \alpha) \cos(\theta - \alpha) \dot{\theta}^2$$

d'où l'équation

$$\left[ I_1 + M \frac{r^2}{\cos^2 \alpha} \sin^2(\theta - \alpha) \right] \ddot{\theta} + M \frac{r^2}{\cos^2 \alpha} \sin(\theta - \alpha) \cos(\theta - \alpha) \dot{\theta}^2 = M_1 - F_2 \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha}$$

c) Equation de LAGRANGE en conservant deux paramètres et en prenant une transformation virtuelle compatible

Les vitesses compatibles sont définies par

$$\delta x + r \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} \delta \theta = 0$$

le travail virtuel

$$\delta W = M_1 \delta \theta + F_2 \delta x$$

L'énergie cinétique est

$$T^o = \frac{1}{2} [I_1 \dot{\theta}^2 + M \dot{x}^2]$$

On peut donc écrire les équations de LAGRANGE en employant la méthode des multiplicateurs

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} = M_1 + \lambda r \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x} = F_2 + \lambda$$

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\theta} = M_1 + \lambda r \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} & (1) \\ M \ddot{x} = F_2 + \lambda & (2) \end{cases}$$

De l'équation de liaison, nous tirons

$$\dot{x} = -r \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} \dot{\theta}$$

$$\ddot{x} = -r \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} \ddot{\theta} - r \frac{\cos(\theta - \alpha)}{\cos \alpha} \dot{\theta}^2$$

d'où de (2) 
$$\lambda = - M r \frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\alpha} \ddot{\theta} - M r \frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos\alpha} \dot{\theta}^2$$

En portant en (1)

$$I_1 \ddot{\theta} = M_1 - M \frac{r^2}{\cos^2\alpha} \sin^2(\theta-\alpha) \ddot{\theta} - M r^2 \frac{\sin(\theta-\alpha) \cdot \cos\alpha}{\cos^2\alpha} \dot{\theta}^2 - F_2 r \frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\alpha}$$

soit

$$\left[ I_1 + M \frac{r^2}{\cos^2\alpha} \sin^2(\theta-\alpha) \right] \ddot{\theta} + M \frac{r^2}{\cos^2\alpha} \sin(\theta-\alpha) \cos(\theta-\alpha) \dot{\theta}^2 = M_1 - F_2 \frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\alpha}$$

C'est bien l'équation déjà trouvée.