Travaux pratiques sur Maple :: Fiche n° 5

§ 1 *Etude de fonctions – Graphisme* (3ème partie)

I– Le but de cet exercice est d'étudier la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{1+x^2}.$$

avec l'assistance de Maple.

1. Déterminer manuellement le domaine de définition de f. En validant la commande **`singular(f(x));`** Maple affiche les points singuliers de la fonction f.
2. Tracer le graphe de la fonction f sur la droite réelle. Le graphe fait apparaître deux extrema.
3. Calculer la fonction dérivée et déterminer ses deux zéros réels. L'un d'eux est évident. Pour déterminer l'autre, commencer par réduire le résultat de la fonction dérivée au même dénominateur, à l'aide de la fonction **`simplify`**. Résoudre à l'aide de la fonction **`solve`**, l'équation polynomiale du 3ème degré qui apparaît au numérateur. Identifier la racine réelle.
4. Localiser les extrema et calculer leurs valeurs respectives.
5. Déterminer les limites de f'(x) quand x tend vers l'infini ?
6. Etudier l'aspect de la tangente au graphe au voisinage du point x = 1.
7. Estimer l'aire du domaine délimité par la graphe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = –3 et x = –1.

II– Reprendre le T.P. consacré à une étude complète de fonction dans MP2, pages 226, ..., 234.

§ 2 *Polynômes et fractions rationnelles*

On a utilisé dans la fiche de TP 1, les fonctions **`ifactor`**, **`iquo`**, **`irem`**, **`igcd`**, **`ilcm`**. Le **i** est mis pour integer. Ces fonctions ont leurs équivalents relatifs aux fonctions polynomiales. Il s'agit des fonctions **`factor`**, **`quo`**, **`rem`**, **`gcd`**, **`lcm`**.

La fonction **`factor`** permet, modulo quelques précautions à prendre, de factoriser un polynôme. Voici un exemple. Si vous validez la ligne de commande

```
factor(X^2-2);
```

Maple ne fournit aucun résultat, car il cherche à factoriser le polynôme en question dans le plus petit corps contenant les coefficients, qui est le corps $\mathbb{Q}$. Avec une petite astuce, on peut factoriser le polynôme dans $\mathbb{R}$. Comme ceci :

```
factor(sqrt(2)*(X^2-2));
```

Exercice 1

Nous avons vérifié dans la fiche de TP 1, que le nombre $256(256^6 - 1)$ est divisible par le nombre 7. Nous allons maintenant montrer avec l'aide de Maple, que pour tout entier naturel $n \geq 2$, le nombre $n(n^6 - 1)$ est divisible par 7.

1ère méthode :

Calculer directement le reste de la division euclidienne du nombre $n(n^6 - 1)$ par 7.

Indication : Faire usage de la fonction **`rem`**, en indiquant la variable utilisée comme troisième argument.

$2^{\text{ème}}$ méthode :

Effectuer un Raisonnement par récurrence sur l'entier naturel n. Pour cela :

1. Désigner par f, la fonction de $\mathbb{N}$ dans lui-même, qui à n, associe $n(n^6 - 1)$.

Indication : Rappelons que la flèche `->` permet de définir une fonction. Voir MP1, page 242.

2. Factoriser, pour $n \in \mathbb{N}$, la différence f(n+1) – f(n) et vérifier qu'elle est divisible par 7.
3. Vérifier que f(2) est divisible par 7 puis compléter la démonstration par récurrence. Penser à écrire que :

$$f(n+1) = f(n) + [f(n+1) - f(n)].$$

$3^{\text{ème}}$ méthode :

Par résolution d'une congruence modulo 7.

1. Consulter la fiche technique de la fonction **`msolve`** et voir l'exemple cité dans MP1, page 275.
2. Se servir de la fonction **`msolve`** pour résoudre dans $\mathbb{N}$, la congruence $n(n^6 - 1) \equiv 0$ modulo 7. Conclure.

Exercice 2

Considérons le polynôme

$$P := X^7 + 27\, X^4 - X^3 - 27.$$

1. Factoriser P dans le corps $\mathbb{R}$.

Indication : Utiliser uniquement la fonction **`factor`** avec en argument, le polynôme P sans changement, et montrer que le résultat retourné par Maple est le bon résultat.

2. Notre but maintenant est de factoriser P dans le corps $\mathbb{C}$. Commencer par résoudre l'équation P = 0 et identifier le résultat par S. Noter bien que S est une séquence.
3. Déduire de 2°, la séquence des polynômes de premier degré, diviseurs de P.

Indication : Utiliser la fonction **`seq`** et savoir que la fonction **`nops`** appelée avec une liste en argument, retourne le nombre d'opérandes de la liste en question.

4. Déduire de 3°, la factorisation de P dans le corps $\mathbb{C}$.

Indication : Utiliser les deux méthodes suivantes.

- Utiliser la fonction **`convert`**, avec l'option (l'argument) **`` `*` ``**. Voir MP1, page 282.
- Utiliser la fonction **`product`**.

5. Décomposer en éléments simples, la fraction rationnelle 1/P dans $\mathbb{R}(X)$.

Indication : Appeler la fonction **`convert`**, avec l'option **`parfrac`**, comme ceci

```
> convert(1/P,parfrac,X) ;
```

Regarder dans la fiche technique de la fonction **`convert`**.

6. Décomposer en éléments simples, la fraction rationnelle 1/P dans $\mathbb{C}(X)$.

Indication : Remplacer dans la ligne de commande précédente, P par sa factorisation obtenue en 4°.

Exercice 3

Réduire au même dénominateur, la fraction rationnelle suivante

$$\frac{3x+1}{x+2} - \frac{x-1}{2x-3} + \frac{x+2}{3x-2}$$

Indication : Utiliser la fonction **`normal`**.