CHAPITRE 3 : Equations différentielles du premier ordre.

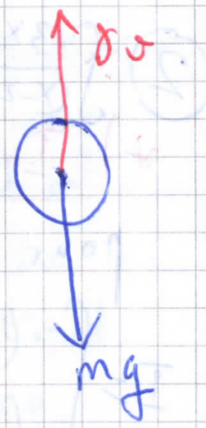
1) Généralités :

Ex : Si on note par $v(t)$ la vitesse d'un objet qui est en chute libre dans l'atmosphère par rapport au temps.

La loi physique qui régit le mouvement des objets est la deuxième loi de Newton exprimé par l'équation :

$$F = ma,$$

où m est la masse de l'objet et a son accélération et F est la force exercée sur l'objet.



Sachant que $a = \frac{dv}{dt}$, alors

$$F = m \frac{dv}{dt}.$$

Quand l'objet tombe, alors

$$F = mg - \gamma v$$

où $g = 9,8 \ m/s^2$ la gravité

γ : Coefficient de la trainée.

(γv : la force de trainée (une force due à la résistance de l'air).

par conséquent : $\boxed{m \frac{dv}{dt} = mg - \gamma v.}$

Cette équation (dite équation différentielle) donne le comportement d'un objet en chute libre dans l'atmosphère.

Par exemple : on suppose que $m = 10\,kg$ et $\gamma = 2\,kg/s$

Alors

$$\boxed{\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - \frac{v}{5}}$$

Exp2 : Si on note par $N(t)$ la population totale d'un pays à l'instant t, alors l'accroissement de cette population est régi par l'équation suivante :

$$\frac{dN(t)}{dt} = \text{naissances} - \text{morts} + \text{migration}.$$

Malthus (1798) propose de décrire l'évolution d'une population en supposant que la migration est négligée et que l'accroissement est proportionnel à l'effectif. c à d :

$$\boxed{\frac{dN(t)}{dt} = r\,N(t)}$$

$P_{n+1} = \lambda P_n$

$P_{n+1} - P_n = (\lambda - 1) P_n$

où $r = b - d$ avec b : taux de natalité

d : " " mortalité.

- Si $r = 0$, alors la population reste constante.
- Si $r > 0$, " " " augmente.
- Si $r < 0$, " " " diminue.

Définition 1 : On appelle équation différentielle, une équation avec une fonction inconnue $y(x)$ de la variable réelle x et une ou plusieurs de ses dérivées $y', y'', \dots$ par exemple.

$$y y' + x = 1 \text{ ou } (y')^2 + x y' + 4 y = 0.$$

Ainsi, de façon générale, l'équation

$F(x, y, y', y'', \dots) = 0$ est une équation différentielle où F est une fonction réelle de plusieurs variables.

Déf 2: • On appelle équation différentielle du premier ordre, la relation de la forme

$$F(x, y, y') = 0 \quad \text{---} \quad (E_1)$$

où F est une fonction réelle de 3 variables.

• On appelle équation différentielle du second ordre, la relation de la forme :

$$F(x, y, y', y'') = 0 \quad \text{---} \quad (E_2).$$

Par exemple :

$$y' + 5xy - e^x = 0 \qquad (\text{premier ordre})$$

et $$2y'' - 3y' + 5y = 0 \qquad (\text{deuxième ordre}).$$

Déf 3: • Une équation différentielle d'ordre n est linéaire si elle est de la forme

$$a_0(x)\, y + a_1(x)\, y' + \dots + a_n(x)\, y^{(n)} = g(x)$$

où les a_i et g sont des fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

• Une équation différentielle linéaire est dite homogène (ou sans second membre) si $g(x) = 0$

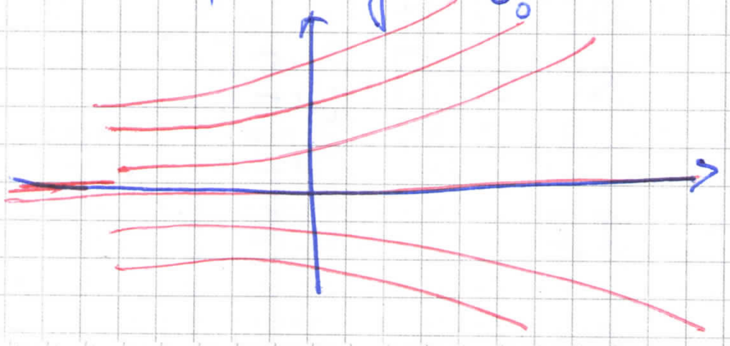
càd :
$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y^{(n)} = 0 .$$

• Si les fonctions a_i sont constantes, alors l'équation différentielle est dite " à coefficients constants " càd :
$$a_0 y + a_1 y' + \dots + a_n y^{(n)} = g(x) .$$

Déf 1 : Une solution de l'équation différentielle sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ qui une fonction dérivable et vérifie l'équation (E1) ou deux fois dérivable et " " (E2).

Exp : $\dfrac{dy}{dx} = y$ $\quad (y' = y)$.

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = dx \quad \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx$$
$$\Rightarrow \ln|y| = x + c$$
$$\Rightarrow e^{\ln|y|} = e^{x+c}$$
$$\Rightarrow |y| = k e^{x} \qquad k : \text{constante.}$$
$$\Rightarrow y = C_0 e^{x} \qquad C_0 : \text{constante.}$$



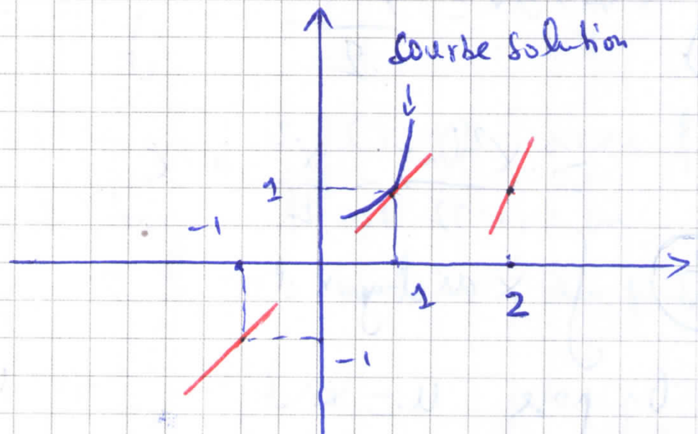
② Equations différentielles du premier ordre :

Considérons l'équation différentielle du premier ordre
$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x)). \quad \left(\text{ou encore } y' = f(x,y)\right)$$

Sans résoudre explicitement cette équation, on peut avoir une idée sur le comportement des solutions en traçant ce qu'on appelle un champ de directions c'à'd : On évalue la fonction f en chacun des points d'une grille rectangulaire, ensuite pour chacun de ces points, on trace un petit segment de droite ayant pour pente la valeur de la fonction f calculée en ce point.

Exp : ① $y' = xy$. On pose $f(x,y) = xy$

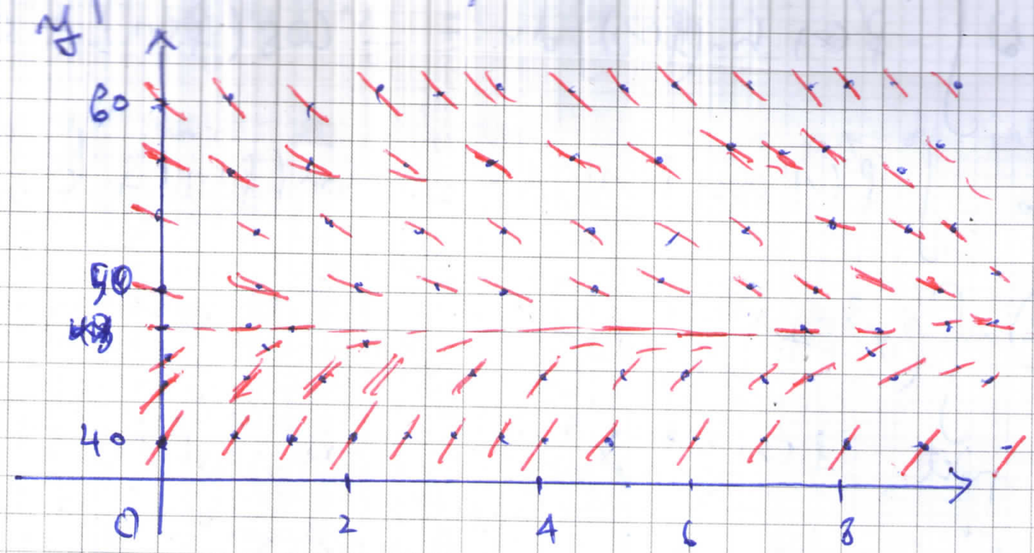
Alors par exemple $f(1,1) = 1$, $f(-1,-1) = 1$ et $f(2,1) = 2$.



② $y' = 9{,}8 - \frac{y}{5}$. On pose $f(y) = 9{,}8 - \frac{y}{5}$

Alors par exemple $y = 40$, $f(40) = 1{,}8$

$y = 50$, $f(50) = -0{,}2$; on peut tracer le champ de direction suivant :



Déf 1 : Soit f de I dans $\mathbb{R}$ et (x_0, y_0) un point de I. On appelle problème de Cauchy en (x_0, y_0), le problème suivant

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

c.à.d chercher une solution de l'équation différentielle sous la condition supplémentaire $y(x_0) = y_0$.

Exp :
$$\begin{cases} y' = xy \\ y(0) = 2 \end{cases} \leftarrow \text{problème de Cauchy.}$$

Théorème (Cauchy - Lipschitz)
Soit l'équation différentielle $y' = f(x,y)$ avec f de classe C^1 par rapport à y. Alors pour un (x_0, y_0), il existe une solution unique du problème de Cauchy
$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}.$$

2.1) Equations différentielles à variables séparables.

une équation différentielle est dite à variables séparables si elle est de la forme

$$g(y)\, y' = f(x) \quad --- \quad (1)$$

où f et g sont des fonctions continues sur des intervalles I et J respectivement.

Si on note $y' = \frac{dy}{dx}$, on a une autre forme de (1)

$$g(y)\, dy = f(x)\, dx .$$

En intégrant, on obtient

$$\int g(y)\, dy = \int f(x)\, dx$$

$$\Rightarrow \quad G(y) = F(x) + c$$

où G est une primitive de g et F est une primitive de f.

Exp : ① $y' = xy$. Alors

$$\frac{dy}{dx} = xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = x\, dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int x\, dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \frac{x^2}{2} + c , \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow |y| = k\, e^{x^2/2} , \quad k \in \mathbb{R}.$$

② $x^2 y' = e^{y} \Rightarrow e^{-y} dy = \frac{dx}{x^2}$

$$\Rightarrow \int e^{-y} dy = \int \frac{dx}{x^2}$$

$$\Rightarrow + e^{-y} = + \frac{1}{x} + c , \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, $\ln e^{-y} = \ln\left(\frac{1}{x} + C\right)$

$$\Rightarrow \quad -y = \ln\left(\frac{1}{x} + C\right)$$

$$\Rightarrow \quad y = \ln\left(\frac{x}{1+xc}\right), \qquad C \in \mathbb{R}.$$

2.2) Equations différentielles linéaires du premier ordre

Une équation différentielle du premier ordre est une équation de la forme

$$y' + a(x)\, y = f(x) \quad \text{--- (2)}$$

où a et f sont deux fonctions continues.

L'équation (2) est dite aussi non homogène (ou avec second membre). Pour la résolution de (2), on commence par l'équation différentielle homogène

a) $$y' + a(x)\, y = 0 \quad \text{--- } (h)$$

Si $y \neq 0$, alors on a :

$$\frac{dy}{dx} = -a(x)\, y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -a(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| = -A(x) + C_1$$

où $C_1 \in \mathbb{R}$ et A est la primitive de a sur l'intervalle I. Ainsi,

$$y(x) = \pm\, e^{C_1} e^{-A(x)}$$

$$\boxed{y(x) = C\, e^{-A(x)}} \quad \text{où } C = \pm e^{C_1}$$

qui est solution de (h).

b) $$y' + a(x) y = f(x) \quad \dots \quad (2)$$

Nous utilisons une méthode dite " méthode de la variation de la constante ", càd chercher une solution générale de (2) sous la forme

$$y(x) = C(x)\, e^{-A(x)}$$

où $x \mapsto C(x)$ est une nouvelle fonction inconnue de x.

Donc : $$y'(x) = C'(x)\, e^{-A(x)} - C(x)\, a(x)\, e^{-A(x)}.$$

Remplaçant y et y' dans (2), on obtient :

$$C'(x)\, e^{-A(x)} - C(x)\, a(x)\, e^{-A(x)} + a(x)\, C(x)\, e^{-A(x)} = f(x)$$

$$\Rightarrow \quad C'(x)\, e^{-A(x)} = f(x)$$

$$\Rightarrow \quad C'(x) = e^{A(x)} f(x)$$

$$\Rightarrow \quad C(x) = \int f(x)\, e^{A(x)}\, dx.$$

Ainsi, la solution de (2) est donnée par :

$$\boxed{y(x) = e^{-A(x)} \left(\int f(x)\, e^{A(x)}\, dx \right)}$$

Exp : $$y' - y = e^{x} \quad \dots \quad (E)$$

- Nous commençons par l'équation homogène

$$y' - y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int dx$$

Ainsi,
$$\ln|y| = x + C_1 , \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$
$$\Rightarrow \quad |y| = C_2 e^{x} , \quad C_2 \in \mathbb{R} , \quad C_2 = e^{C_1}$$
$$\Rightarrow \quad y = C e^{x} , \quad C \in \mathbb{R} , \quad C = \pm C_2 .$$

- pour l'équation non homogène, on a la solution générale sous la forme

$$y(x) = C(x) e^{x}$$
$$\Rightarrow \quad y'(x) = C'(x) e^{x} + C(x) e^{x} .$$
$$(E) \Leftrightarrow \quad C'(x) e^{x} + \cancel{C(x) e^{x}} - \cancel{C(x)} e^{x} = e^{x}$$
$$\Leftrightarrow \quad C'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad C(x) = x + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Ainsi,
$$\boxed{y(x) = (x + k) e^{x} , \quad k \in \mathbb{R}.}$$

2.3) Équations différentielles de Bernoulli :

Soient f, g deux fonctions continues sur I. Une équation de la forme
$$y' + f(x) y + g(x) y^{\alpha} = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$
est dite une équation de Bernoulli.

Remarquons que si $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$, alors on retrouve l'équation différentielle linéaire.

Pour résoudre l'équation de Bernoulli, on fait un changement de variable qui permet de la transformer en une équation linéaire.

On divise par y^α $(y \neq 0)$, on obtient :

$$\frac{y'}{y^\alpha} + f(x)\frac{y}{y^\alpha} + g(x) = 0$$

$$\Rightarrow y' y^{-\alpha} + f(x) y^{1-\alpha} + g(x) = 0.$$

On pose $z = y^{1-\alpha}$ (changement de variable),

alors on obtient $z' = (1-\alpha) y^{-\alpha} y'$.

Ainsi, l'équation de Bernoulli devient :

$$\frac{z'}{1-\alpha} + f(x) z + g(x) = 0$$

et ça c'est une équation différentielle linéaire qu'on peut résoudre.

Exp : Résoudre $y' + xy + xy^4 = 0$ ... (E)

En posant $z = y^{-3}$, on obtient :

$$z' = -3 y' y^{-4}$$

Ainsi,

$$z' - 3x z = 3x$$

On commence par trouver la solution de l'équation homogène $z' - 3xz = 0$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = 3xz \Rightarrow \frac{dz}{z} = 3x\,dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int 3x\,dx$$

$$\Rightarrow \ln|z| = \frac{3x^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Donc, $z = k\, e^{\frac{3x^2}{2}}$

Maintenant, pour l'équation non homogène $z' - 3xz = 3x$,

On a : $z = k(x)\, e^{\frac{3x^2}{2}}$

$$z'(x) = k'(x)\, e^{\frac{3x^2}{2}} + 3x\, k(x)\, e^{\frac{3x^2}{2}}.$$

Ainsi, $k'(x)\, e^{\frac{3x^2}{2}} + \cancel{3x\, k(x)\, e^{\frac{3x^2}{2}}} - \cancel{3\, k(x)\, e^{\frac{3x^2}{2}}} = 3x$

$$\Rightarrow \quad k'(x) = 3x\, e^{-\frac{3x^2}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad k(x) = -\int -3x\, e^{-\frac{3x^2}{2}}\, dx$$

$$k(x) = -e^{-\frac{3x^2}{2}} + c.$$

Ceci donne que

$$z(x) = \left(-e^{-\frac{3x^2}{2}} + c\right) e^{\frac{3x^2}{2}} = -1 + c\, e^{\frac{3x^2}{2}}.$$

puisque $z(x) = \frac{1}{y^3(x)} \Rightarrow y(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{z(x)}}$, alors

$$y(x) = \left(\frac{1}{-1 + c\, e^{\frac{3x^2}{2}}}\right)^{1/3}.$$

2.4) Equations de Riccati :

Une équation différentielle de la forme

$$y' = f(x) + g(x)\,y + h(x)\,y^2 \quad \text{----} \quad (R)$$

est dite équation de Riccati où f, g et h sont des fonctions continues sur un intervalle I.

pour la résolution, en posant $y = y_1 + z$ avec y_1 solution particulière de (R), alors : $y' = y_1' + z'$ et on obtient :

$$y_1' + z' = f(x) + g(x)(y_1 + z) + h(x)(y_1+z)^2$$
$$= f(x) + g(x)y_1 + g(x)z + h(x)y_1^2 + h(x)z^2$$
$$+ 2h(x)y_1 z.$$

Ainsi,

$$z' = (2hy_1 + g)z + hz^2$$ qui est une équation de Bernoulli.

Exp: Résoudre $y' = 1 - x^3 + xy^2$ .... $(*)$

On remarque facilement que $y_1 = x$ est une solution particulière de $(*)$. Donc, on cherche une solution générale de la forme $y = x + z$ où z est solution de

$$z' - 2x^2 z - x z^2 = 0$$

qui est une équation de Bernoulli

$$\left(\begin{array}{l} y' = 1 + z' \text{ et } y' = 1 - x^3 + x(x+z)^2 = 1 - x^3 + x(x^2 + z^2 + 2xz) \\ \cancel{1} + z' = \cancel{1} - \cancel{x^3} + \cancel{x^3} + xz^2 + 2xz \end{array} \right)$$

On pose $h = \frac{1}{z} \Rightarrow h' = -\frac{z'}{z^2}$ et on remarque que h vérifie l'équation différentielle

$$h' + 2xh + x = 0.$$

Commençons par l'équation homogène $h' + 2xh = 0$.

La solution est $h(x) = k e^{-x^2}$, $k \in \mathbb{R}$.

Maintenant pour la solution de l'équation non homogène, on a : $h(x) = k(x) e^{-x^2}$ qui implique que $k'(x) = -x e^{x^2} \Rightarrow k(x) = -\int x e^{x^2}$

Ainsi, $k(x) = -\frac{1}{2}e^{x^2} + c$ qui donne que

$$h(x) = -\frac{1}{2} + c\,e^{-x^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow z(x) = \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{-\frac{1}{2} + c\,e^{-x^2}}$$

et ceci nous ramène à donner la solution générale de (*) sous la forme

$$y(x) = x + \frac{1}{-\frac{1}{2} + c\,e^{x^2}}.$$

3) Équations différentielles du second ordre à coefficients constants :

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

L'équation $y'' + a y' + b y = f(x)$ ... (E)

est dite équation différentielle du second ordre à coefficients constants avec second membre.

3.1) Équation homogène :

L'équation (E) sans second membre est dite "homogène".

Ainsi, soit $y'' + a y' + b y = 0$ ... (E_0)

Défn : L'équation $r^2 + a r + b = 0$ ... (C), où $r \in \mathbb{R}$ est dite équation caractéristique de l'équation différentielle homogène (E_0).

Notons le discriminant de (E_0) par

$\Delta = a^2 - 4b$. nous avons alors 3 cas :

Premier cas : Si $\Delta > 0$, alors l'équation (C) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2.
La solution générale de (E_0) est de la forme

$$y_0 = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$ où C_1 et C_2 sont des constantes réelles.

Deuxième cas : Si $\Delta = 0$, alors l'équation (C) admet une racine double r et la solution de (E_0) est de la forme

$$y_0 = (C_1 + C_2 x) e^{rx} , \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}).$$

Troisième cas : Si $\Delta < 0$, alors l'équation (C) admet deux racines complexes $r_1 = \beta + i w$ et $r_2 = \beta - i w$ $(\beta, w \in \mathbb{R})$. Ainsi, la solution de l'équation (E_0) est de la forme :

$$y_0 = \left(C_1 \cos(wx) + C_2 \sin(wx) \right) e^{\beta x} , \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R})$$

Exemples : 1 $\quad y'' + 2y' - 3y = 0 \quad \text{---} \ (1)$

L'équation caractéristique est :

$$r^2 + 2r - 3 = 0 \qquad (\Delta = 16)$$

Donc $r_1 = 1$ et $r_2 = -3$. D'où la solution de (1) est :

$$y_0 = C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x} , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

2 $\quad y'' - 4y' + 4y = 0 \quad \text{---} \ (2)$

L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 4 = 0$

$\Delta = 0$ et $r = 2$

Ainsi, la solution de (2) est de la forme

$$y_0 = (C_1 + C_2 x) e^{2x} \quad , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

③ $y'' + 4y = 0$ --- (3)

L'équation caractéristique est $r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r^2 = -4$

$\Rightarrow r^2 = 4i^2 \Rightarrow r = 2i$ ou $r = -2i$.

Donc, la solution de (3) est :

$$y_0 = \{ C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) \, , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3.2) Équation non homogène :

La solution générale de l'équation (E) s'écrit sous la forme $y = y_0 + y_1$

où y_0 est la solution de l'équation homogène (E_0)
et y_1 " " " particulière de l'équation avec second membre.

a) Second membre comme un polynôme de degré n :

$$y'' + a y' + b y = P_n(x)$$

où P_n est un polynôme de degré n.

Premier cas : Si $b \neq 0$, alors on cherche y_1 sous la forme d'un polynôme de degré n.

Deuxième cas : Si $b = 0$, alors $y_1 = x \, Q_n(x)$ avec Q_n un polynôme de degré n.

Exp : $y'' + 2y' - 3y = x^3 + 2x + 1$ --- (*)

On a : $y_0 = C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

On cherche une solution particulière de la forme

$$y_1 = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3.$$

$y_1' = 3a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2$ et $y_1'' = 6a_0 x + 2a_1$

Nous remplaçant ces termes dans (*), nous avons:

$$6a_0 x + 2a_1 + 6a_0 x^2 + 4a_1 x + 2a_2 - 3a_0 x^3 - 3a_1 x^2 - 3a_2 x - 3a_3$$
$$= x^3 + 2x + 1$$

Par identification, on a:

$$\begin{cases} -3a_0 = 1 \\ 6a_0 - 3a_1 = 0 \\ 6a_0 + 4a_1 - 3a_2 = 2 \\ 2a_1 + 2a_2 - 3a_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = -1/3 \\ a_1 = -2/3 \\ a_2 = -\frac{20}{9} \\ a_3 = -\frac{61}{27} \end{cases}$$

Ainsi, la solution générale de (*) est :

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-3x} + \left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 - \frac{20}{9}x - \frac{61}{27}\right).$$

b) Second membre de la forme e^{mx} : $(m \in \mathbb{R})$

On cherche une solution y_1, pour cela, on distingue 3 cas suivant les valeurs de m.

① Si m n'est pas une racine de l'équation caractéristique, alors $y_1 = k e^{mx}$, $k \in \mathbb{R}$.

② Si m est une racine simple de l'équation caractéristique, alors $y_1 = k x e^{mx}$, $k \in \mathbb{R}$.

③ Si m est une racine double de l'équation caractéristique, alors $y_1 = k x^2 e^{mx}$.

Exp: $$y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \quad \text{---} \quad (**)$$

On a: $$y_0 = (C_1 + C_2 x) e^{2x} \quad , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

On cherche $y_1 = k x^2 e^{2x}$. Ainsi,

$$y_1' = 2kx e^{2x} + 2kx^2 e^{2x} \Rightarrow y_1'' = 2k e^{2x} + 4kx e^{2x} + 4kx e^{2x} + 4kx^2 e^{2x}$$

Donc, $(**)$

$$\Rightarrow 2k e^{2x} + 4kx e^{2x} + 4kx e^{2x} + 4kx^2 e^{2x} - 8kx e^{2x} - \cancel{8kx^2 e^{2x}} + \cancel{4kx^2 e^{2x}} = e^{2x}$$

$$\Rightarrow 2k e^{2x} = e^{2x} \Rightarrow k = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, la solution de $(**)$ est de la forme

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{2x} + \frac{e^{2x}}{2} \quad , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

c) Second membre de la forme $\sin(mx)$, $m \in \mathbb{R}$ (ou $\cos(mx)$):

Dans ce cas, il y'a 2 cas:

premier cas: Si m n'est pas une racine de l'équation caractéristique, alors

$$y_1(x) = k_1 \cos(mx) + k_2 \sin(mx) \quad , \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

Deuxième cas: Si m est une racine de l'équation caractéristique, alors

$$y_1(x) = x(k_1 \cos(mx) + k_2 \sin(mx)).$$

Exp : $y'' + 4y = \cos x$.

On sait que $y_0 = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Remarquons que i n'est pas une racine de l'équation caractéristique, donc

$$y_1 = k_1 \cos x + k_2 \sin x.$$

$\Rightarrow y_1' = -k_1 \sin x + k_2 \cos x \Rightarrow y_1'' = -k_1 \cos x - k_2 \sin x$.

Ainsi, $-k_1 \cos x - k_1 \sin x + 4k_1 \cos x + 4k_2 \sin x = \cos x$

$$\Rightarrow 3k_1 \cos x + 3k_2 \sin x = \cos x$$

par identification, on a :

$$\begin{cases} k_2 = 0 \\ k_1 = 1/3 \end{cases}$$

Ainsi, la solution générale est de la forme

$$y = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) + \frac{1}{3}\cos x.$$

d) Second membre de la forme $P_n(x)\, e^{mx}$ (où P_n est un polynôme de degré n), $m \in \mathbb{R}$:

premier cas : Si m n'est pas une racine de l'équation caractéristique, alors on cherche une solution particulière de la forme $y_1(x) = Q_n(x)\, e^{mx}$ où Q_n est un polynôme de degré n.

Deuxième cas : Si m est une racine de multiplicité k ($k = 1, 2$) de l'équation caractéristique de la forme

$$y_1(x) = x^k\, Q_n(x)\, e^{mx}$$

où Q_n est un polynôme de degré n.

Exp: $$y''-2y'+y=(x+2)e^x \quad \ldots \quad (E).$$

L'équation sans second membre est

$$y''-2y'+y=0 \quad \ldots \quad (E_0)$$

L'équation caractéristique de (E_0) est:

$$r^2-2r+1=0 \Rightarrow (r-1)^2=0 \quad \ldots \quad (C)$$

Ainsi, $$y_0=(C_1+C_2x)e^x.$$

Maintenant, puisque 1 est une racine double de l'équation (C), alors la solution particulière est

$$y_1 = x^2(ax+b)e^x.$$

$$y_1' = 2x(ax+b)e^x + x^2\left(ae^x+(ax+b)e^x\right)$$

$$= 2ax^2e^x+2bxe^x+ax^2e^x+x^2(ax+b)e^x$$

$$= 2ax^2e^x+2bxe^x+ax^2e^x+ax^3e^x+bx^2e^x$$

et $$y_1'' = 4axe^x+2ax^2e^x+2be^x+2bxe^x+2axe^x$$
$$+ax^2e^x+3ax^2e^x+ax^3e^x+2bxe^x+bx^2e^x$$

En remplaçant dans (E), on obtient:

$$4axe^x+2ax^2e^x+2be^x+\cancel{2bxe^x}+2axe^x+ax^2e^x+3ax^2e^x$$
$$+\cancel{ax^3e^x}+2bxe^x+\cancel{bx^2e^x}-4ax^2e^x-4bxe^x-2ax^2e^x$$
$$-\cancel{2ax^3e^x}-\cancel{2bx^2e^x}+ax^3e^x+bx^2e^x = xe^x+2e^x$$

Ainsi, par identification, on a:

$$\begin{cases} 6a=1 \\ 2b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{6} \\ b=1 \end{cases}.$$

ceci implique que

$$y_1 = x^2\left(\frac{1}{6}x + 1\right)e^x.$$

Ainsi, la solution générale de (E) est donnée par

$$y = (c_1 + c_2 x)e^x + x^2\left(\frac{x}{6} + 1\right)e^x.$$