Université Abou Bekr Belkaid – Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

جامعة أبو بكر بلقايد
UNIVERSITÉ DE TLEMCEN

Licence 1ère année MI, 2019–2020

Analyse2
Fiche de TD 3 : Équations différentielles

Exercice 1. Résoudre les équations différentielles homogènes du premier ordre suivantes

$$1) y' = x^2 y, \qquad 2) y' = y\ln(x),$$

$$3) y' = \sqrt{y}, \qquad 4) (1+x^2)y' + y = 0.$$

Exercice 2. Résoudre les équations non homogènes suivantes

$$1) y' - \frac{2y}{x} + 1 = 0, \qquad 2) y' = 3y + \sin(3x),$$

$$3) (1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2, \qquad 4) y' = x^2(1-y).$$

Exercice 3. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants

$$(1) \begin{cases} xy' = y+1, \quad x>0, \\ y(1) = 0, \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} (x+1)y' - xy + 1 = 0, \quad x > -1, \\ y(0) = -2. \end{cases}$$

Exercice 4. En utilisant la méthode de Bernouilli, donner la solution unique de l'équation différentielle suivante et précisez l'intervalle maximal d'existence

$$(1) \begin{cases} y' = xy^2 + \frac{xy}{1+x^2}, \quad x>0, \\ y(0) = -3, \end{cases}$$

Exercice 5. On se propose de trouver les solutions de l'équation différentielle suivante

$$y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y^2(x) = -9x^2 \qquad (E).$$

1)Déterminer $a \in]0,+\infty[$ tel que $y(x) = ax$ soit une solution particulière y_0 de (E).
2) Montrer que le changement de fonction inconnue $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$ transforme l'équation (E) en l'équation différentielle suivante

$$z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right) z(x) = 1 \qquad (E_1).$$

3) Intégrer (E_1) sur $]0,+\infty[$.
4) Donner toutes les solutions de (E) définies sur $]0,+\infty[$.

Exercice 6. Résoudre les équations différentielles suivantes

$$1) y'' - 2y' + 6y = 0, \qquad 2) y'' + 4y' + 4y = 0,$$

$$3) \begin{cases} y'' - 5y' + 4y = 0, & , \\ y(0) = 5, \quad y'(0) = 8. \end{cases}$$

Exercice 7. Résoudre les équations différentielles suivantes

1)$y'' - 3y' + 2y = 4x^2$.

2)$y'' + y = \cos(x)$.

3)$y'' + 2y' + y = 4xe^x$.

Exercice 8. On propose d'étudier un modèle de croissance de population proposé par P.F. Verhulst en 1840.

En considérant une population formée de N individus et évoluant en fonction du temps t, alors N est solution de l'équation (dite équation logistique) suivante

$$N'(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right),$$

où $r > 0$ est le taux de croissance et $K > 0$ est la capacité limite .

1) On admet que la population n'est jamais nulle et on pose $y(t) = \frac{1}{N(t)}$. calculer N' en fonction de y et y'.

2) Vérifier que y est solution de l'équation différentielle suivante

$$y' = r^*(1 - Ky) \qquad (E)$$

où r^* est à déterminer.

3) Résoudre l'équation différentielle (E).

4) En déduire que

$$N(t) = \frac{K}{1 + \alpha e^{-rKt}}.$$

5) Comment évolue cette population lorsque $t \to +\infty$?