Digression sur les variétés stables et instables. (Voir cours Systèmes dynamiques)

Considérons, comme exemple, le système planaire (i.e de dimension 2) suivant : (h_1 et h_2 sont C^1)

$$(1) \begin{cases} \dot{x} = -\lambda x + h_1(x,y) \\ \dot{y} = \mu y + h_2(x,y) \end{cases} \quad \text{où} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{h_i(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0 \quad i=1,2. \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

[Ce genre d'écriture s'obtient par un développement de Taylor au voisinage de $(0,0)$, de fonctions nulles en 0. Le système (1) est vu comme une perturbation du système linéaire

$$(2) \begin{cases} \dot{x} = -\lambda x \\ \dot{y} = \mu y \end{cases} \quad \text{au voisinage de } (0,0).$$

(2) est en fait le linéarisé de (1) en $(0,0)$.

Supposons que λ et μ sont deux réels strictement positifs. $-\lambda$ et μ sont les valeurs propres de (1) [donc de (2)] en $(0,0)$. $(0,0)$ est donc un point-selle pour le linéarisé.

• $E^s :=$ espace propre de (2) associé à la valeur propre négative $(-\lambda)$. (Noyau de $(A-(-\lambda)I)$)
Il a la particularité d'être invariant pour (2) c.à.d si $(u_0,v_0) \in E^s$, alors la solution $(u(t;u_0,v_0), v(t;u_0,v_0))$ partant de (u_0,v_0) à l'instant $t=0$ vérifie $(u(t;u_0,v_0), v(t;u_0,v_0)) \in E^s \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$.

Il est facile de voir que E_s n'est autre que l'axe des u (voir figure 1)
E^s est formé de 3 orbites : de demi-droites et l'origine. Les flèches indiquent que ces orbites correspondent à des solutions qui tendent vers $(0,0)$ qd $t \to +\infty$. (point-selle oblige!). En réalité, $E^s \setminus \{0,0\}$ sont les seules orbites de (2) qui convergent vers l'origine quand $t \to +\infty$. Plus exactement, on a la définition équivalente :

$$E^s = \{(u_0,v_0) \in \mathbb{R}^2 : (u(t;u_0,v_0), v(t;u_0,v_0)) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} (0,0)\}.$$

E^s est appelé variété stable de (2). Elle est de dimension 1, comme espace vectoriel. Dans le cas du plan, on l'appelle aussi séparatrice stable.

• De la même manière, l'espace propre associé à la valeur propre positive μ est appelé variété instable de (2), de dimension 1, elle aussi invariante. (voir figure 1). C'est ici l'axe des v.

$$E^u = \{(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2 ; (u(t; u_0, v_0), v(t; u_0, v_0)) \underset{t \to -\infty}{\longrightarrow} (0,0)\}.$$

Ceci pour le linéarisé. Question : existe-t-il une variété stable et une variété instable pour le non linéaire (1) ? ~~Quelles~~ Quelles sont leurs positions, au moins localement, par rapport à E^s et E^u ?

On cherche donc la variété stable définie par

$$W^s = \{(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 ; (x(t; x_0, y_0), y(t; x_0, y_0)) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} (0,0)\}$$

et la variété instable

$$W^u = \{(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 ; (x(t; x_0, y_0), y(t; x_0, y_0)) \underset{t \to -\infty}{\longrightarrow} (0,0)\}$$

Notez d'abord que W^s et W^u ne sont jamais vides, car elles contiennent toutes les deux l'origine $(x_0, y_0) = (0,0)$.

Le théorème de la variété stable ⚠, dont on donne un énoncé ici dans $\mathbb{R}^2$, mais qui se généralise à des dimensions plus grandes, assure l'existence, au moins localement, d'une telle variété, graphe d'une fonction continûment différentiable.

<u>Théorème</u> : (...)

$\exists\, \varepsilon > 0$, $\exists$ une fonction h_s de classe C^1 telle que

$$h_s :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto y = h_s(x)$$ et

(1) L'ensemble $W^s_{loc} = \{(x,y) \,/\, y = h_s(x)\}$ est une courbe invariante pour le système non linéaire (1) et, $\forall (x_0,y_0) \in W^s_{loc}$, $(x(t,x_0,y_0), y(t,x_0,y_0)) \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} (0,0)$.

(2) La courbe $y = h_s(x)$ est tangente en $(0,0)$ à la séparatrice stable E^s du linéarisé (2).

(3) W^s_{loc} est une variété stable locale et se prolonge à la variété stable W^s en faisant tendre t vers $-\infty$.

De la même manière on définit la variété instable locale $W^u_{loc} \subset W^u$, graphe d'une fonction

$$h_u :]-\delta, \delta[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$y \longmapsto x = h_u(y)$$

tangente à E^u en $(0,0)$.

On a alors $\quad W^s \cap W^u = (0,0)$

(voir figure 2)

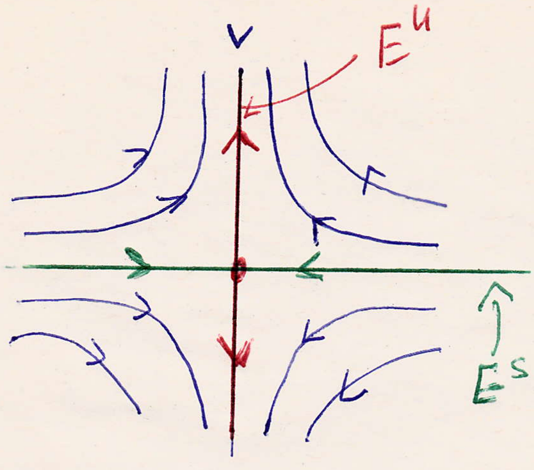


Fig. 1.

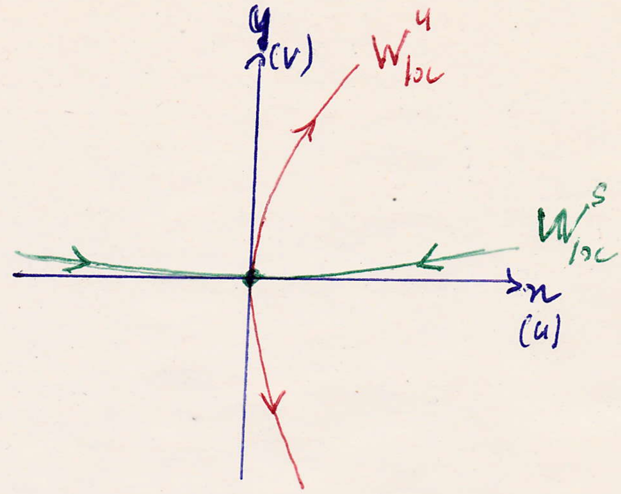


Fig. 2.

Remarque : Quand on dit par exemple variété stable, cela ne signifie pas que c'est une variété qui attire les orbites qui lui sont proches !!
Cela signifie seulement qu'elle est formée de tous les points de l'espace à partir desquels les orbites (donc aussi les solutions) convergent vers l'origine quand $t \to +\infty$.

Plus généralement, on définit de manière analogue, pour un système $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, f régulière et telle que $f(x^*) = 0$ (x^* équilibre hyperbolique), les variétés W^s et W^u dans le cas où la jacobienne $Df(x^*)$ admet k valeurs propres à parties réelles strictement positives et $(n-k)$ valeurs propres à ~~valeurs~~ parties réelles strictement négatives.

Dans ce cas $\dim W^s = k$ et $\dim W^u = n-k$,

$W^s \cap W^u = \{x^*\}$.

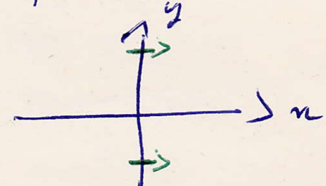
Exemple, (1) $\begin{cases} \dot{x} = x + y^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$, (2) $\begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$

- $(0,0)$ est le seul point d'équilibre.
- E^u : l'axe des x, E^s : l'axe des y
- La solution de (1) de condition initiale (x_0, y_0) est :

$$\begin{cases} x(t) = \left(x_0 + \frac{1}{3} y_0^2\right) e^t - \frac{1}{3} y_0^2 e^{-2t} \\ y(t) = y_0 e^{-t} \end{cases}$$

Notons que dans ce cas, l'axe des x est invariant pour le système non linéaire (1). Comme il était aussi invariant pour (2), alors on peut se convaincre que $W^u = E^u$!

En revanche, le champ de (1) est transverse à l'axe des y d'où $W^s \neq E^s$.



- Exercice, Soit la courbe $(\mathcal{C})$ $x + \frac{1}{3} y^2 = 0$

(i.e. $x = h(y) := -\frac{1}{3} y^2$)

1. Montrer que $(\mathcal{C})$ est invariante pour (1)
2. Montrer que $(\mathcal{C})$ est tangente à E^s en $(0,0)$.
3. Montrer toutes les solutions de (1) qui partent d'un point de $(\mathcal{C})$ convergent vers $(0,0)$ qd $t \to +\infty$. (Voir figure 3)

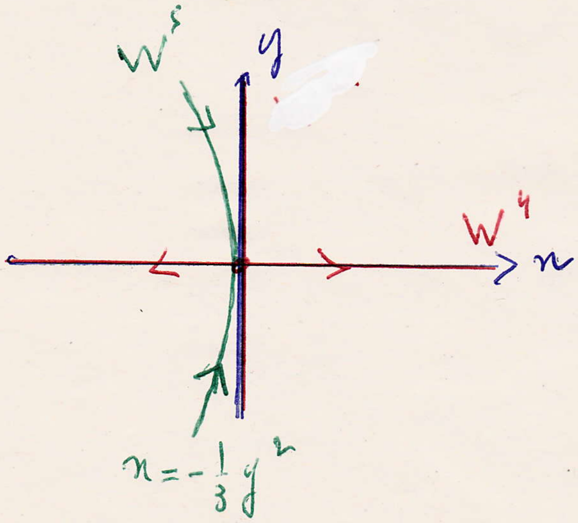
Cet exercice permet donc de conclure que
$W^s_{loc} \in \mathcal{C}$!

En fait on a $W^s = \mathcal{C}$ et $W^u = \{(x,0), x \in \mathbb{R}\}$.

Finissons par une remarque. Si $(0,0)$ est un équilibre G.A.S d'un système non linéaire dans le plan, alors
$$W^s = \mathbb{R}^2, \quad \dim W^s = 2$$
et $$W^u = \{(0,0)\}, \quad \dim W^u = 0.$$ [les variétés stables et instables ne sont jamais vides]

Si, par exemple, $(0,0)$ est instable, mais n'est pas un point-selle, alors
$$W^u = \mathbb{R}^2 \text{ et } W^s = \{(0,0)\}.$$

Fin de la digression.



Cordialement.