Chapitre 5 : Intégration Numérique

I/ Introduction Générale :

* Le but est de calculer $\int_a^b f(x)\,dx$ où f est une fonction donnée

* Quelles sont les méthodes pour approcher les intégrales de fonctions ?

Il n'est pas toujours possible, pour une fonction arbitraire, de trouver la forme explicite d'une primitive. Et il est parfois difficile de l'utiliser même si on la connait

Exemple 1 : Comment peut on tracer le graphe de la fonction "erf" appelée "fonction d'erreur de GAUSS" définie comme suit :

$$\mathrm{erf} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \to \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

Exemple 2 : $f(x) = \cos(4x)\cos(3\sin x)$ pour laquelle on a

$$\int_0^\pi f(x)\,dx = \pi \frac{81}{16} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-9/4)^k}{k!\,(k+4)!}$$

Le calcul de l'intégrale est transformé en un calcul, aussi difficile, de la somme d'une série

Solution : Il faut considérer des méthodes numériques afin d'approcher la quantité à laquelle on s'intéresse, indépendamment de la difficulté à intégrer la fonction.

Dans les méthodes d'intégration, l'intégrale d'une fonction f continue sur un intervalle borné $[a, b]$ est remplacée par une somme finie

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \sum_{i=0}^{n-1} a_i f(x_i)$$

Le choix de la subdivision de l'intervalle d'intégration et celui des coefficients qui interviennent dans la somme approchant l'intégrale sont des critères essentiels pour minimiser l'erreur. Ces méthodes se répartissent en deux catégories :

1/ Les méthodes composées : dans lesquelles la fonction est remplacée par un polynôme d'interpolation sur chaque intervalle élémentaire $[x_i, x_{i+1}]$ de la subdivision $[a,b]$: $([a,b] = \cup_i [x_i, x_{i+1}]$

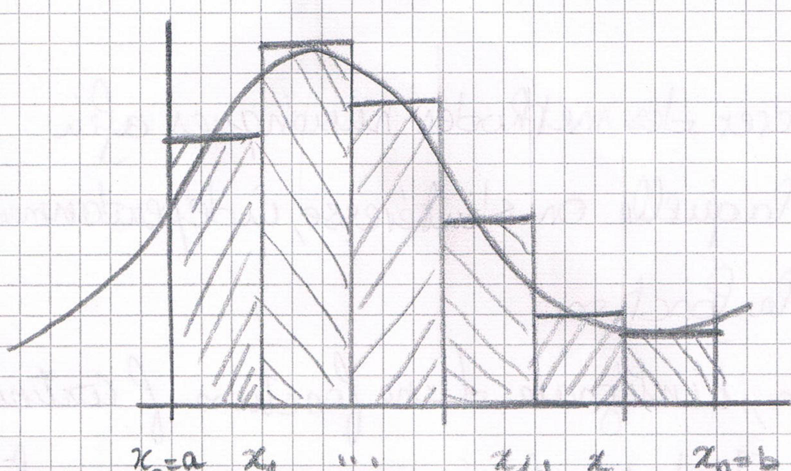
2/ Les méthodes de GAUSS : fondées sur les polynômes orthogonaux pour lesquelles les points de la subdivision sont imposés.

II/ Méthode des rectangles

La méthode des rectangles consiste à :

a/ diviser l'intervalle $[a,b]$ en "n" segments égaux. Nous obtenons ainsi $(n+1)$ points équidistants $x_i = a + ih$; $i = 0, 1, \dots, n$ avec $h = \frac{b-a}{n}$

b/ Approximer la surface de chaque "tranche" par un rectangle



$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = (x_i - x_{i-1})\, f(\alpha_i) = h\, f(\alpha_i)$$

avec $\alpha_i \in [x_{i-1}, x_i]$

La fonction est remplacée par une constante sur chaque sous intervalle.

On peut prendre $\alpha_i = x_i$ (point à droite) ou $\alpha_i = x_{i-1}$ (point à gauche) mais la meilleure valeur de α_i est celle du point milieu.

c.à.d : $\alpha_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$

En additionnant la somme des surfaces de tous les rectangles, on obtient :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\alpha_i)\,dx.$$

Calcul de l'erreur

L'erreur de la méthode des rectangles (point milieu) est donnée par l'expression :

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - h \sum_{i=0}^{n} f(a+ih) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{24 n^2} M_2$$

avec $M_2 = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$

Exemple 1/ Calculer $\int_0^5 e^{\sin x}\,dx$ en prenant $n=5$

2/ Donner une majoration de l'erreur

3/ Calculer le nombre de segments qui permet d'avoir une précision de 0.01.

$n=5 \Rightarrow h = \frac{b-a}{n} = \frac{5-0}{5} = 1$

x_i	$\alpha_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$	$f(\alpha_i)$
$x_0 = a = 0$		
$x_1 = x_0 + h = 1$	$\alpha_1 = \frac{x_0+x_1}{2} = 0{,}5$	1,6151
$x_2 = x_1 + h = 2$	$\alpha_2 = \frac{x_1+x_2}{2} = 1{,}5$	2,7115
$x_3 = x_2 + h = 3$	$\alpha_3 = \frac{x_2+x_3}{2} = 2{,}5$	1,8193
$x_4 = x_3 + h = 4$	$\alpha_4 = \frac{x_3+x_4}{2} = 3{,}5$	0,7041
$x_5 = x_4 + h = 5 = b$	$\alpha_5 = \frac{x_4+x_5}{2} = 4{,}5$	0,3762

$$\int_0^5 e^{\sin x}\,dx = h \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)$$

$= 1\,(1{,}6151 + 2{,}7115 + 1{,}8193 + 0{,}7041 + 0{,}3762)$

$$\int_0^5 e^{\sin x}\,dx = 7{,}2263$$

$f(x) = e^{\sin x} \Rightarrow f''(x) = -e^{\sin x}(\sin^2 x + \sin x - 1)$

$M_2 = \sup_{x\in[0,5]} |f''(x)| = e$

* $\left|\int_0^5 f(x)\,dx - h\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i)\right| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} M_2$

$$\leq \frac{(5-0)^3}{24\times(5)^2}\, e = 0{,}5663$$

* Pour avoir une précision de 0,01, il faut avoir :

$\frac{(b-a)^3}{24n^2} M_2 \leq 0{,}01$ ce qui donne :

$$n \geq \sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{24\times 0{,}01}} = 37{,}77 \Rightarrow n = 38$$

III/ Méthode des trapèzes

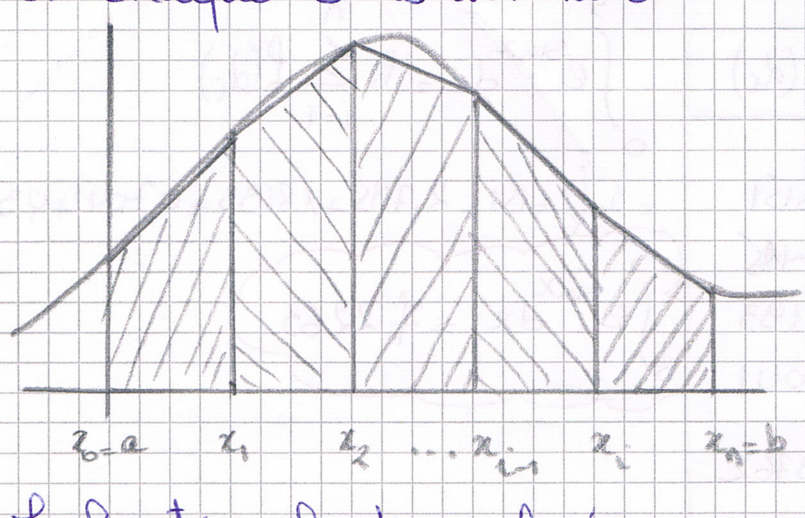
La méthode des trapèzes consiste à :

1/ Diviser l'intervalle $[a,b]$ en n segments égaux. Nous obtenons donc $(n+1)$ points équidistants avec $x_i = a + ih$

$i = 0, 1, \dots, n$

et $h = \frac{b-a}{n}$

2/ Approximer la surface de chaque "tranche" par un trapèze construit à partir des valeurs de la fonction aux bornes de chaque sous intervalle



$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx = h\,\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

La fonction f est remplacée par une droite (Polynôme de degré 1) sur chaque sous-intervalle. En additionnant la somme des surfaces de tous les trapèzes, on obtient :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx' = \frac{h}{2}\left(f(x_0)+f(x_1)\right) + \frac{h}{2}\left(f(x_1)+f(x_2)\right) + \dots + \frac{h}{2}\left(f(x_{i-1})+f(x_i)\right)$$
$$+ \dots + \frac{h}{2}\left(f(x_{n-1})+f(x_n)\right)$$

$$J(f) = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$

Calcul de l'erreur

Pour la formule des trapèzes, l'erreur est donnée par :

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2$$

où $M_2 = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$

Exemple : $\int_0^5 e^{\sin x}\,dx$ avec $n=5$

$h = \frac{5-0}{5} = 1$

x_i	$f(x_i)$
$x_0 = a = 0$	1
$x_1 = x_0 + h = 1$	2,3198
$x_2 = x_1 + h = 2$	2,4826
$x_3 = x_2 + h = 3$	1,1516
$x_4 = x_3 + h = 4$	0,4692
$x_5 = x_4 + h = 5 = b$	0,3833

$$\int_0^5 e^{\sin x} = \frac{h}{2}\left[f(0)+f(5)+2\sum_{i=1}^{4} f(x_i)\right]$$
$$= \frac{h}{2}\left[f(0)+f(5)+2\left(f(1)+f(2)+f(3)+f(4)\right)\right]$$

$$\int_0^5 e^{\sin x} = 7,1148$$

L'erreur :

$$\left| \int_0^5 f(x)\,dx - \frac{h}{2}\left[f(0) + f(5) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right] \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 = \frac{(5-0)^3}{12(5)^2} e$$

$$\leq 1,1326$$

Pour avoir une précision de 0,01, il faut avoir :

$$\frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \leq 0,01 \Rightarrow n \geq \sqrt{\frac{M_2(b-a)^3}{12 \times 0,01}} = 53,21 \text{ soit } n = 54$$

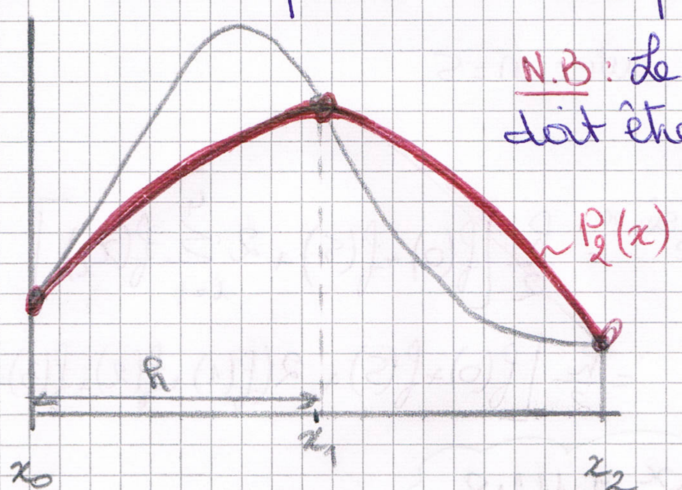
IV/ Méthode de Simpson

Cette méthode consiste à :

1/ Diviser l'intervalle $[a,b]$ en "n" segments égaux. Nous obtenons ainsi $(n+1)$ points équidistants $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$

et $h = \frac{b-a}{n}$

2/ Approximer la fonction sur chaque tranche par une parabole construite à partir de trois points consécutifs.



N.B : Le nombre total des segments n doit être pair ($n = 2m$)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \dots + \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x)\,dx.$$

Entre x_0 et x_2 et passant par x_1, il y a 3 interpolations, On peut donc remplacer la fonction $f(x)$ par un polynôme de degré 2.

D'après la forme de Lagrange, ce polynôme s'écrit :

$$P_2(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$$

avec

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \quad ; \quad L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \quad ; \quad L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

si on pose $x - x_1 = t h$, alors :

$$\begin{cases} x - x_2 = x - x_1 - \underbrace{(x_2 - x_1)}_{h} = th - h = (t-1)h \\ x - x_0 = x - x_1 + \underbrace{(x_1 - x_0)}_{h} = th + h = (t+1)h \end{cases}$$

ce qui donne :

$$L_0(x) = \frac{1}{2}(t^2 - t) \quad ; \quad L_1(x) = 1 - t^2 \quad ; \quad L_2(x) = \frac{1}{2}(t^2 + t)$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)\,dx$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{f(x_0)}{2} h \int_{-1}^{1} (t^2 - t)\,dt + f(x_1) h \int_{-1}^{1} (1 - t^2)\,dt + \frac{f(x_2)}{2} h \int_{-1}^{1} (t^2 + t)\,dt$$

$$= \frac{f(x_0)}{3} h + \frac{4 f(x_1)}{3} h + \frac{f(x_2)}{3} h = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right)$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i})\right)$$

Calcul de l'erreur

L'erreur dans ce cas là est donnée par :

$$\left| \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx - \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{m} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i})\right) \right| \leq \frac{(b-a)^5}{180 n^4} M_4$$

où $M_4 = \sup_{x \in [a,b]} |f^{IV}(x)|$

Exemple :

$$\int_0^5 e^{\sin x}$$ en partageant l'intervalle $[0,5]$ en 4 segments (Le nbre de segments doit être pair)

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{5-0}{4} = 1{,}25$$

x_i	$f(x_i)$
$x_0 = a = 0$	1
$x_1 = x_0 + h = 1{,}25$	2,5831
$x_2 = x_1 + h = 2{,}5$	1,8193
$x_3 = x_2 + h = 3{,}75$	0,5646
$x_4 = x_3 + h = 5 = b$	0,3833

$$\int_0^a e^{\sin x} = \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{2} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{1} f(x_{2i})\right)$$

$$\int_0^5 e^{\sin x} = \frac{1{,}25}{3}\left(f(x_0) + f(x_4) + 4\left(f(x_1) + f(x_3)\right) + 2f(x_2)\right) = 7{,}3387$$

L'erreur :

$$(i) \quad \left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 4\sum_{i=1}^{2} f(x_{2i-1}) + 2\sum_{i=1}^{1} f(x_{2i})\right)\right| \leq \frac{(5-0)^5}{180 \times 4^4} M_4$$

$$f^{IV}(x) = e^{\sin x}\left(\sin^4 x + 6\sin^3 x + 5\sin^2 x - 5\sin x - 3\right)$$

$$M_4 = \sup_{x \in [0,5]} |f^{IV}(x)| = 4e$$

$$(i) = \frac{(5-0)^5}{180 \times 4^4} \times 4e = 0{,}7374$$

* Pour avoir une précision de 0,01 $\Rightarrow \frac{(b-a)^5}{180 n^4} M_4 \leq 0{,}01$

$\Rightarrow n \geq \sqrt[4]{\frac{M_4 (b-a)^5}{180 \times 0{,}01}} = 11{,}72$ soit $n = 12$. (avec n doit être pair)

V/ Formule de Quadrature

Pour calculer $\int_a^b f(x)\,dx$, les méthodes d'intégration évoquées précédemment sont toutes basées sur la formule suivante :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n} w_i f(\alpha_i)$$

Cette formule est appelée formule de quadrature

n : le nombre de segments (ou sous intervalle)
x_i : sont appelés les noeuds (abscisses) de la formule.
w_i " les "poids", appelés également coefficients de la formule

Méthode	w_i	α_i
rectangles	$w_i = h$	$\alpha_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$
Trapèzes	$w_0 = \frac{h}{2}$; $w_n = \frac{h}{2}$ $w_i = h$ $(i=1,\dots,n-1)$	$\alpha_i = x_i$
Simpson	$w_0 = \frac{h}{3}$ $w_n = \frac{h}{3}$ $w_{2i-1} = \frac{4}{3}h$ $(i=1,\dots m)$ $w_{2i} = \frac{2h}{3}$ $(i=1,\dots m-1)$	$\alpha_i = x_i$