Travaux Dirigés : Intégration Numérique (Correction)

Exercice 1

1/ Estimer en utilisant la méthode des rectangles, $\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)dx$ à partir des données suivantes :

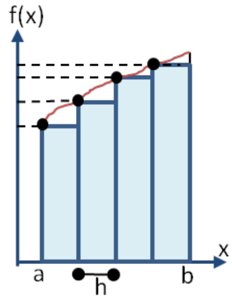
x	0	1/2	1	3/2	2	5/2
f(x)	3/2	2	2	1,6364	1,2500	0,9565

D'après les données fournies, nous pouvons utiliser la méthode des rectangles (point de droite ou point de gauche) ; ici la méthode du point milieu ne peut pas être utilisée comme nous ne connaissons pas la fonction *f(x)* donc nous ne pouvons pas calculer $f\left(\alpha_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$.

On a a=0 et b=5/2 donc : $h = \frac{b-a}{5} = 0{,}5$

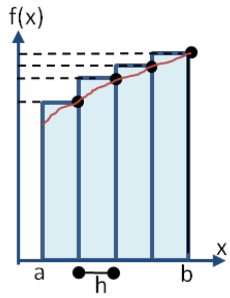
- **Point à gauche** : $\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$

$\int_0^{5/2} f(x)dx = 0{,}5(\frac{3}{2} + 2 + 2 + 1{,}6364 + 1{,}2500) \Rightarrow \boxed{\int_0^{5/2} f(x)dx = \mathbf{4{,}1932}}$



- **Point à droite** : $\int_a^b f(x)dx = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$

$\int_0^{5/2} f(x)dx = 0{,}5(2 + 2 + 1{,}6364 + 1{,}2500 + 0{,}9565) \Rightarrow \boxed{\int_0^{5/2} f(x)dx = \mathbf{3{,}9214}}$



2/ Par la méthode des trapèzes :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)]$$

$$\Rightarrow \int_0^{5/2} f(x)dx = \frac{0{,}5}{2}\left[\frac{3}{2} + 0{,}9565 + 2(2 + 2 + 1{,}6364 + 1{,}2500)\right] \Rightarrow \boxed{\int_0^{5/2} f(x)dx = \mathbf{4{,}0573}}$$

Exercice 2

Calculer par la méthode des trapèzes (n=4) $I = \int_1^2 \frac{1}{\sin x} e^{x^2}\, dx$

Nous avons a=1 et b=2 avec n=4 donc $h = \frac{b-a}{4} = 0{,}25$

x	1	1,25	1,5	1,75	2
f(x)= $\frac{1}{\sin x} e^{x^2}$	3,2304	5,0272	9,5115	21,7289	60,0443

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)]$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{1}{\sin x} e^{x^2} dx = \frac{1}{8}[3{,}2304 + 60{,}0443 + 2(5{,}0272 + 9{,}5115 + 21{,}7289)] \Rightarrow \boxed{\int_0^{5/2} f(x)dx = \mathbf{16{,}9762}}$$

Exercice 3

x_i	1	2	3	4	5	6
$y_i=y(x_i)$	0,6	0,75	1	1,5	3	5

1/ Calculer par la méthode des trapèzes $I_1 = \int_3^5 y(x)\,dx$

3	4	5
1	1,5	3

Nous avons a=3 et b=5 avec n=2 et h=1

$\int_3^5 y(x)dx = \frac{1}{2}[y_0 + y_2 + 2y_1] = \frac{1}{2}[1 + 3 + 2.(1{,}5)] \Rightarrow \boxed{\int_3^5 y(x)dx = \mathbf{3{,}5}}$

2/ Calculer par la méthode de Simpson $I_2 = \int_2^4 y(x)\,e^{1/x}\,dx$

On pose $z(x) = y(x)\,e^{1/x}$

x_i	2	3	4
y_i	0,75	1	1,5
z_i	1,2365	1,3956	1,9260

Nous avons a=2 et b=4 avec n=2 et h=1

D'après la méthode de Simpson : $\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[f(a) + f(b) + 4f(x_i)]$

$\int_2^4 z(x)dx = \frac{1}{3}[z_0 + z_2 + 4z_1] = \frac{1}{3}[1{,}2365 + 1{,}9260 + (1{,}3956 * 4)] \Rightarrow \boxed{\int_3^5 y(x)dx = \mathbf{2{,}915}}$

Exercice 4

$I = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$

1/ Calculer la valeur exacte de I

La primitive de $\frac{1}{x}$ est F(x)=Ln(x) donc la valeur exacte de $I = [Ln(x)]_1^2 = \mathbf{0{,}6931}$

2/ Évaluer numériquement cette intégrale par la méthode des trapèzes avec m=3 sous-intervalles.

Nous avons a=1 et b=2 avec m=3 donc $h = \frac{b-a}{3} = \frac{1}{3}$

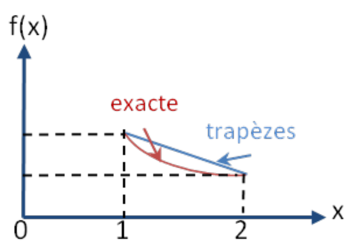
x	1	$4/3$	$5/3$	2
$f(x)=\frac{1}{x}$	1	$3/4$	$3/5$	$1/2$

$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)]$ avec $f(x_i) = \frac{1}{x_i}$

$\Rightarrow \int_1^2 f(x)dx = \frac{1}{6}\left[1 + \frac{1}{2} + 2\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{5}\right)\right] = \mathbf{0{,}7}$

3/ La valeur numérique obtenue est supérieure à ln(2) car la fonction $\frac{1}{x}$ est convexe.

Graphiquement le trapèze est au dessus de la courbe $\frac{1}{x}$. L'aire sous les trapèzes sera donc supérieure à l'aire sous la courbe. Pour bien visualiser la construction considérons m=1



Cela est vrai quelque soit le pas « h » choisi, car la fonction est convexe, ce qui signifie qu'une corde définie par 2 points de la courbe $y = \frac{1}{x}$ sera toujours au dessus de la courbe et le raisonnement précédent, l'aire sous les trapèzes sera supérieure à l'aire exacte.

4/ Quel nombre de sous-intervalles m faut-il choisir pour avoir une erreur inférieure à 10^{-4} ?

L'erreur majorée est donnée par : $|E_m| \leq \frac{(b-a)^3}{12m^2} sup|f''(x)|_{x\in[1,2]}$

On a $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{2}{x^3} \Rightarrow sup|f''(x)|_{x\in[1,2]} = 2$

$|E_m| \leq \frac{(2-1)^3}{12m^2} * 2 = \frac{1}{6m^2} \leq 10^{-4} \Rightarrow m \geq \sqrt{\frac{1}{6*10^{-4}}} \Rightarrow m \geq 40{,}82 \Rightarrow \boxed{\mathbf{m=41}}$