Travaux Dirigés N°6 : Équations différentielles

Exercice 1

Soit à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(t) = -y(t) + t + 1 \quad {}_{t\in[0,2]} \end{cases}$$

1. Calculer la valeur exacte ;
2. Calculer en utilisant le schéma explicite et implicite d'Euler (prendre h=0,2).

Exercice 2

Résoudre dans l'intervalle $[0,\pi]$ l'équation différentielle (prendre h= $\frac{\pi}{10}$)

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(t) = t^2 \sin(y) \quad {}_{t\in[0,\pi]} \end{cases}$$

1. Par la méthode d'Euler améliorée ;
2. Par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

Exercice 3

1. Approximer la solution y(t) du problème $\begin{cases} \mathrm{y}(0) = 1 \\ \mathrm{y}' = -2\mathrm{y} \end{cases}$ au point t=1 par la méthode d'Euler avec un h=0,2 ;
2. Approximer y(0,2) par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 avec le même pas h ;
3. Déterminer la valeur de h qu'il faut utiliser dans la méthode d'euler pour approximer y(t) au point t=1 avec une précision 10^{-2}.

Rappel

Problème de Cauchy	$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$	
Méthode		
Euler	Explicite $\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)_{0\le n\le N} \end{cases}$	Implicite $\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})_{0\le n\le N} \end{cases}$
Euler améliorée	$\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ {y^*}_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{2}, {y^*}_{n+\frac{1}{2}}\right)_{0\le n\le N} \end{cases}$	
Runge- Kutta d'ordre 4	$\begin{cases} P_{n,1} = f(t_n, y_n) \\ P_{n,2} = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} P_{n,1}\right) \\ P_{n,3} = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} P_{n,2}\right) \\ P_{n,4} = f(t_{n+1}, y_n + hP_{n,3}) \\ y_{n+1} = y_0 + \frac{h}{6} f(P_{n,1} + 2P_{n,2} + 2P_{n,3} + P_{n,4}) \end{cases}$	