Correction de la série de TD N°6

Exercice 1

$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(t)=-y(t)+t+1 \end{cases} \qquad t\in[0,2]$$

1/ Calculer la valeur exacte

$y'(t)+y(t)=t+1$ c'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 sa solution analytique est

$$y(t)=e^{-t}+t$$

Les valeurs de $y(t)$ pour $t\in[0,2]$ avec $h=0,2$

t	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2
y	1	1,0187	1,0703	1,1488	1,2493	1,3679	1,5012

t	1,4	1,6	1,8	2		
y	1,6466	1,8019	1,9653	2,1353		

2/ Calcul de la solution approchée

* Schéma d'Euler explicite

$$\begin{cases} y(0)=1 \\ y_{n+1}=y_n+hf(t_n,y_n) \end{cases} \qquad t_{n+1}=t_n+h$$

On a $t_0=0$; $y_0=1$, $h=0,2$ et $f(t,y)=-y+t+1$

t	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2
y	1	1,0000	1,0400	1,1120	1,2096	1,3277	1,4621

t	1,4	1,6	1,8	2
y	1,6097	1,7678	1,9342	2,1074

* Schéma d'Euler Implicite

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y_{n+1} = y_n + h f(t_{n+1}, y_{n+1}) \end{cases} \qquad t_{n+1} = t_n + h$$

$$y_{n+1} = y_n + h(-y_{n+1} + t_{n+1} + 1) \iff (h+1) y_{n+1} = y_n + h(t_{n+1} + 1)$$
$$= y_n + h(t_n + h + 1)$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = \frac{y_n + h(t_n + h + 1)}{1 + h}$$

t	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2
y	1	1,033	1,0944	1,1787	1,2823	1,4019	1,5349

t	1,4	1,6	1,8	2
y	1,6791	1,8326	1,9938	2,1615

Exercice 2

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(t) = t^2 \sin(y) \end{cases} \qquad t \in [0, \pi]$$

1/ La méthode d'Euler améliorée

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ t_{n+1} = t_n + h \\ y^*_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + h f\left(t_n + \frac{h}{2}, y^*_{n+\frac{1}{2}}\right) \end{cases} \qquad f(t_n, y_n) = t_n^2 \sin(y_n)$$

Les valeurs de y pour $t \in [0, \pi]$ avec $h = \frac{\pi}{10}$

t	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{7\pi}{10}$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{9\pi}{10}$	π
y_n	1	1,0065	1,066	1,2404	1,6128	2,2145	2,7572	2,9854	3,0547	3,0536	2,9910

2/ La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

$$\begin{cases} y_0 = y(0) = 1 \\ P_{n,1} = f(t_n, y_n) \\ P_{n,2} = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} P_{n,1}\right) \\ P_{n,3} = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} P_{n,2}\right) \\ P_{n,4} = f\left(t_{n+1}, y_n + h P_{n,3}\right) \\ y_{n+1} = y_0 + \frac{h}{6}\left(P_{n,1} + 2P_{n,2} + 2P_{n,3} + P_{n,4}\right) \end{cases}$$

Les valeurs de y pour $t \in [0, \pi]$

t	0	$\frac{\pi}{10}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{3\pi}{10}$	$\frac{2\pi}{5}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{5}$	$\frac{7\pi}{10}$	$\frac{4\pi}{5}$	$\frac{9\pi}{10}$	π
y	1	1,0087	1,0711	1,2508	1,6274	2,2060	2,7515	3,0267	3,1103	3,1286	3,128

Exercice 3

1/ Approximer la solution y(t) du problème

$$\begin{cases} y' = -2y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

au pt $t = 1$ par la méthode d'Euler avec $h = 0,2$ $\quad f(t_n, y_n) = -2y_n$

t	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
y	1	0,6	0,36	0,216	0,1296	0,0777

$y_1 = y_0 + h f(t_0, y_0) = 1 + 0,2(-2)$

$y_2 = y_1 + h f(t_1, y_1) = 0,6 + 0,2(-2 \times 0,6)$

2/ Approximer y(0,2) par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4. avec $h = 0,2$

t	0	0,2
y	1	0,8352

3/ La valeur de h qu'il faut pour avoir une précision de 10^{-2}

selon Euler, la précision est donnée par :

$$|y_n - y(t_n)| \leq kh$$

avec y_n est la valeur approchée

$y(t_n)$: la valeur exacte

k : est une cste independante de n et h

* La solution exacte de notre probleme :

$y' = -2y \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -2 \rightarrow \ln y = -2t$

Ce qui ramène à $y = e^{-2t}$

au pt $t = 1 \Rightarrow y_{exacte} = 0{,}1353$

$|y_1 - y(1)| = 0{,}0576 \leq kh \Rightarrow k \geq 0{,}28$

Soit $k = 0{,}3$

Pour avoir une précision de 10^{-2}

$kh \leq 10^{-2} \Rightarrow h \leq 0{,}034$ Soit $h = 0{,}03$

c à d $n = 30$