Corrigé du TD : Résolution des équations non-linéaires *f(x)=0*

Exercice 1 (Méthode de Bissection)

1/ $f(x) = x^3 - 4x - 8{,}95$ dans l'intervalle [2,3] avec une précision de 10^{-2} :

$$x^k = \frac{a_k + b_k}{2}$$

On vérifie que $f(a).f(b) < 0 \Leftrightarrow f(2).f(3) = -(8{,}95).(6{,}05) < 0$ Condition vérifiée !

k	a_k	x_k	b_k	F(a)	F(x)	F(b)
1	2,00	2,50	3,00	(-)	(-)	(+)
2	2,50	2,75	3,00	(-)	(+)	(+)
3	2,50	2,63	2,75	(-)	(-)	(+)
4	2,63	2,69	2,75	(-)	(-)	(+)
5	2,69	2,72	2,75	(-)	(+)	(+)
6	2,69	2,70	2,72	(-)	(-)	(+)
7	2,70	2,71	2,72	(-)	(+)	(+)
8	2,70	2,70	2,71	(-)	(+)	(+)

La solution est donc :

$\boxed{x=2{,}70}$

2/ $f(x) = -5x^3 + 39x^2 - 43x - 39$ dans l'intervalle [1,5] avec une précision de 10^{-2} :

k	a_k	x_k	b_k	F(a)	F(x)	F(b)
1	1,00	3,00	5,00	(-)	(+)	(+)
2	1,00	2,00	3,00	(-)	(-)	(+)
3	2,00	2,50	3,00	(-)	(+)	(+)
4	2,00	2,25	2,50	(-)	(+)	(+)
5	2,00	2,13	2,25	(-)	(-)	(+)
6	2,13	2,19	2,25	(-)	(+)	(+)
7	2,13	2,16	2,19	(-)	(-)	(+)
8	2,16	2,17	2,19	(-)	(+)	(+)
9	2,16	2,16	2,17	(-)	(+)	(+)

La solution est donc :

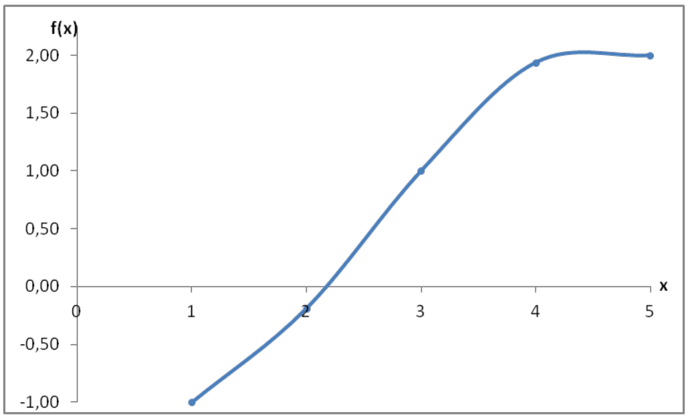
$\boxed{x=2{,}16}$

La solution peut être obtenue d'une manière graphique : $f(x) = -5x^3 + 39x^2 - 43x - 39$

x	f(x)
1	-48,00
2	-9,00
3	48,00
4	93,00
5	96,00

en divisant les valeurs par (-f(x=1) = 48) on obtient ⇒

f(x)
-1,00
-0,1875
1,00
1,9375
2,00



<u>Exercice 2</u> (Méthode de Point fixe)

Résoudre avec la méthode de point fixe

1/ $f(x) = x - x^{\frac{4}{5}} - 2 = 0$ et $x_0 = 8$ avec une précision de 10^{-4}

$$g_1(x) = x = x^{\frac{4}{5}} + 2 \text{ ou } g_2(x) = x = (x-2)^{\frac{5}{4}}$$

<u>a/Si on choisit $g_1(x) = x_{n+1} = x_n^{\frac{4}{5}} + 2$</u> :

k	x_n	x_{n+1}	k	x_n	x_{n+1}
0	8,0000	7,2780	9	6,4408	6,4376
1	7,2780	6,8934	10	6,4376	6,4359
2	6,8934	6,6854	11	6,4359	6,4349
3	6,6854	6,5720	12	6,4349	6,4344
4	6,5720	6,5098	13	6,4344	6,4341
5	6,5098	6,4756	14	6,4341	6,4339
6	6,4756	6,4568	15	6,4339	6,4339
7	6,4568	6,4465	16	6,4339	**6,4338**
8	6,4465	6,4408	17	6,4338	**6,4338**

La solution est donc : $\boxed{x=6{,}4338}$

<u>b/Si on choisit $g_2(x) = (x-2)^{\frac{5}{4}}$</u> :

k	x_n	x_{n+1}
0	8,0000	9,3905
1	9,3905	12,1855
2	12,1855	18,1961
3	18,1961	32,4909
4	32,4909	71,6494
5	71,6494	201,2086

La fonction $g_2(x)$ ne converge pas ; les valeurs sont croissantes

2/ $f(x) = x - 2x^{\frac{4}{5}} + 2 = 0$ et $x_0 = 1$ avec une précision de 10^{-2} :

$$g_1(x) = x = 2(x^{\frac{4}{5}} - 1) \text{ ou } g_2(x) = x = \left(\frac{x+2}{2}\right)^{\frac{5}{4}}$$

<u>a/Si on choisit $g_1(x) = x_{n+1} = 2(x_n^{\frac{4}{5}} - 1)$</u> : La solution ne converge pas !

b/<u>On choisit $g_2(x) = x_{n+1} = \left(\frac{x_n+2}{2}\right)^{\frac{5}{4}}$</u> :

k	x_n	x_{n+1}	k	x_n	x_{n+1}	k	x_n	x_{n+1}
0	1,00	1,66	8	3,32	3,39	16	3,64	3,66
1	1,66	2,13	9	3,39	3,46	17	3,66	3,67
2	2,13	2,47	10	3,46	3,51	18	3,67	3,68
3	2,47	2,74	11	3,51	3,55	19	3,68	3,68
4	2,74	2,94	12	3,55	3,58	20	3,68	3,69
5	2,94	3,09	13	3,58	3,60	21	3,69	3,70
6	3,09	3,22	14	3,60	3,63	22	**3,70**	**3,70**
7	3,22	3,32	15	3,63	3,64	23	**3,70**	**3,70**

La solution est donc : $\boxed{x=3{,}70}$
Avec une précision de 10^{-4} le nombre d'itérations s'élève à **53** est une solution $\boxed{x=3{,}7161}$

Exercice 3 (Ordre de convergence de la méthode de point fixe)

$$f(x) = x^2 - 5x + 6 = 0$$

La solution numérique de cette équation donne deux racines ($x_1 = 2$ et $x_2 = 3$)

1/ Choix de la fonction *g(x)* :

a.	$\boldsymbol{f(x) = x^2 - 2x - 3x + 6 = 0}$	$\Rightarrow$	$\boldsymbol{g(x) = x = \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 6)}$ $\boldsymbol{g(x) = x = \frac{1}{3}(x^2 - 2x + 6)}$
b.	$\boldsymbol{f(x) = x^2 - x - 4x + 6 = 0}$	$\Rightarrow$	$\boldsymbol{g(x) = x = x^2 - 4x + 6}$ $\boldsymbol{g(x) = x = \frac{1}{4}(x^2 - x + 6)}$
c.	$f(x) = x^2 - 5x + 6 = 0$	$\Rightarrow$	$g(x) = x = \frac{1}{5}(x^2 + 6)$
d.	$f(x) = x^2 - 5x + 6 = 0$	$\Rightarrow$	$g(x) = x = \sqrt{5x - 6}$
e.	$f(x) = x(x - 5) + 6 = 0$	$\Rightarrow$	$g(x) = x = \frac{6}{5 - x}$

2/ Si on prend $g(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 6)$:

En appliquant le théorème d'OSTROWDKI : $g'(x) = x - \frac{3}{2}$

Pour s=2 $\Rightarrow |g'(2)| = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$ la méthode du point fixe converge.

$\varepsilon_{n+1} = x_{n+1} - s \Leftrightarrow \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n g'(s) + \frac{1}{2}\varepsilon_n{}^2 g''(s) + O(\varepsilon_n{}^3)$

Si on néglige les termes d'ordre ≥2 $\Rightarrow \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n g'(s) = \frac{\varepsilon_n}{2}$

L'ordre de convergence : $\boxed{\varepsilon_{n+1} = C\varepsilon_n{}^P}$

- <u>Pour un x_0=1,5</u> :

$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n{}^2 - 3x_n + 6)$; $\varepsilon_{n+1} = x_{n+1} - s$; $\varepsilon_n = x_n - s$

k	x_n	x_{n+1}	$\varepsilon_{n+1}/\varepsilon_n$	k	x_n	x_{n+1}	$\varepsilon_{n+1}/\varepsilon_n$	k	x_n	x_{n+1}	$\varepsilon_{n+1}/\varepsilon_n$
1	1,5000	1,8750	**0,2500**	5	1,9874	1,9938	**0,4937**	9	1,9992	1,9996	**0,4996**
2	1,8750	1,9453	**0,4375**	6	1,9938	1,9969	**0,4969**	10	1,9996	1,9998	**0,4998**
3	1,9453	1,9742	**0,4727**	7	1,9969	1,9985	**0,4985**	11	1,9998	1,9999	**0,4999**
4	1,9742	1,9874	**0,4871**	8	1,9985	1,9992	**0,4992**	12	1,9999	2,0000	**0,5000**

C=0,5
P=1

3/ $g(x) = x^2 - 4x + 6 : \Rightarrow g'(x) = 2x - 4$ et $g''(x) = 2$

Pour s=2 $\Rightarrow |g'(2)| = 0 < 1 \Rightarrow$ la méthode du point fixe converge.

$g''(2)$ =2

$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n g'(s) + \frac{1}{2}\varepsilon_n{}^2 g''(s) + O(\varepsilon_n{}^3) \Rightarrow \varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2}\varepsilon_n{}^2 . 2 = \varepsilon_n{}^2$ Convergence est quadratique (P=2)

L'ordre de convergence : $\boxed{\varepsilon_{n+1} = C\varepsilon_n{}^P}$

- <u>Pour un x_0=1,5</u> :

$x_{n+1} = x_n{}^2 - 4x_n + 6$; $\varepsilon_{n+1} = x_{n+1} - s$; $\varepsilon_n = x_n - s$

k	x_n	x_{n+1}	$\varepsilon_{n+1}/\varepsilon_n{}^2$	k	x_n	x_{n+1}	$\varepsilon_{n+1}/\varepsilon_n{}^2$
1	1,5000	2,2500	**1,0000**	4	2,0039	2,0000	**1,0000**
2	2,2500	2,0625	**1,0000**	5	2,0000	2,0000	**1,0000**
3	2,0625	2,0039	**1,0000**	6	2,0000	2,0000	0,0000

C=1
P=2

4/ Le meilleur choix de g(x) : La fonction $g(x) = x^2 - 4x + 6$ converge plus rapidement que $g(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 3x + 6)$

<u>Exercice 4</u> (Méthode de Newton)

L'algorithme de la méthode s'écrit :

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \\ critère\ d'arrêt \end{cases}$$

1/ <u>Calcul de $\sqrt{2}$ avec la méthode de Newton</u> :

$x = \sqrt{2} \Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_n) = {x_n}^2 - 2 = 0\ ;\ f'(x_n) = 2x_n$

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{{x_n}^2 - 2}{2x_n} = \dfrac{x_n}{2} + \dfrac{1}{x_n} \\ critère\ d'arrêt\ (4\ chiffres\ après\ la\ virgule) \end{cases}$$

k	x_n	x_{n+1}		k	x_n	x_{n+1}
0	1,0000	1,5000		2	1,4167	1,4142
1	1,5000	1,4167		3	**1,4142**	**1,4142**

La solution est : $\boxed{\sqrt{2} = 1,4142}$

2/

$f(x) = x - e^{-x^2}, x_0 = 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1 + 2xe^{-x^2}$

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n - e^{-{x_n}^2}}{1 + 2x_n e^{-{x_n}^2}} \\ critère\ d'arrêt\ (4\ chiffres\ après\ la\ virgule) \end{cases}$$

k	x_n	x_{n+1}
0	1,0000	0,6358
1	0,6358	0,6529
2	**0,6529**	**0,6529**

La solution est : $\boxed{x_{sol} = 0,6529}$

$s = \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3 + \cdots}}} \quad S_0 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad s^3 = \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3 + \cdots}} = 3 + s \ \Rightarrow \ s^3 - s - 3 = 0$

$$\begin{cases} s_0 = 2 \\ s_{n+1} = s_n - \dfrac{f(s_n)}{f'(s_n)} = s_n - \dfrac{{s_n}^3 - s_n - 3}{3{s_n}^2 - 1} \\ critère\ d'arrêt\ (4\ chiffres\ après\ la\ virgule) \end{cases}$$

k	x_n	x_{n+1}		k	x_n	x_{n+1}
0	2,0000	1,7273		2	1,6737	1,6717
1	1,7273	1,6737		3	**1,6717**	**1,6717**

La solution est : $\boxed{s = 1,6717}$

3/ <u>L'algorithme de Newton permettant de calculer la racine de l'équation $x = tg(x+1)$</u> :

$f(x) = x - tg(x+1) = 0$ avec $\left(tg(x+1)\right)' = 1 + tg^2(x+1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0\ initial \\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{x_n - tg(x_n + 1)}{tg^2(x_n + 1)} \\ critère\ d'arrêt\ (4\ chiffres\ après\ la\ virgule) \end{cases}$$

4/ $x_0 = 3,4$

k	x_n	x_{n+1}
0	3,4000	3,4317
1	3,4317	3,4286
2	**3,4286**	**3,4286**

La solution est : $\boxed{x_{sol} = 3,4286}$

5/ En déduire une racine de l'équation $xtg\left(\frac{x+1}{x}\right) - 1 = 0$

$xtg\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow tg\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow tg(1+S) = S$ avec $s = \frac{1}{x_{sol}} = \frac{1}{3,4286} \Rightarrow \boxed{s = 0,2917}$