Solution Travaux Dirigés n°1:
Les méthodes de résolution directes des systèmes d'équations linéaires

<u>Exercice n° 01</u>

$$Système\ \ 01: \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \\ 8 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ 35 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\left[A^{(0)}\right] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 6 & 4 & 0 & 26 \\ 8 & 5 & 1 & 35 \end{bmatrix}}$$

$$\begin{cases} a_{ij}^{k} = a_{ij}^{k-1} \quad \dfrac{a_{ik}^{k-1}}{a_{kk}^{k}} a_{kj}^{k-1} \\ b_{i}^{k} = b_{i}^{k-1} \quad \dfrac{a_{ik}^{k-1}}{a_{kk}^{k-1}} b_{k}^{k-1} \end{cases} \quad \begin{matrix} i=k+1,n \\ j=k+1,n \end{matrix}$$

On prend **k=1** on annule le terme a_{21} sous le pivot a_{11}

i=2 j=1 $a_{21}^{1} = a_{21}^{0} \quad \frac{a_{21}^{0}}{a_{11}^{0}} a_{11}^{0} = 0$

i=2 j=2 $a_{22}^{1} = a_{22}^{0} \quad \frac{a_{21}^{0}}{a_{11}^{0}} a_{12}^{0} = 4 \quad \frac{6}{2} 1 = +1$

i=2 j=3 $a_{23}^{1} = a_{23}^{0} \quad \frac{a_{21}^{0}}{a_{11}^{0}} a_{13}^{0} = 0 \quad \frac{6}{2} 2 = -6$

ici on pose la colonne des b_i comme la colonne n+1 de a soit $b_i = a_{in+1}$

On a alors i=2 j=4 $b_{2}^{1} = a_{24}^{0} \quad \frac{a_{21}^{0}}{a_{11}^{0}} a_{14}^{0} = 26 \quad \frac{6}{2} 10 = -4$

On annule ensuite le terme a_{31} sous le pivot a_{11}

i=3 j=1 $a_{31}^{1} = a_{31}^{0} \quad \frac{a_{31}^{0}}{a_{11}^{0}} a_{11}^{0} = 0$

i=3 j=2 $a_{32}^{1} = a_{32}^{0} \quad \frac{a_{31}^{0}}{a_{11}^{0}} a_{12}^{0} = 5 \quad \frac{8}{2} 1 = +1$

i=3 j=3 $a_{33}^{1} = a_{33}^{0} \quad \frac{a_{31}^{0}}{a_{11}^{0}} a_{13}^{0} = 1 \quad \frac{8}{2} 2 = -7$

i=3 j=4 $b_{3}^{1} = a_{34}^{0} \quad \frac{a_{31}^{0}}{a_{11}^{0}} a_{14}^{0} = 35 \quad \frac{8}{2} 10 = -5$

$$\boxed{\left[A^{(1)}\right] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & +1 & -7 & -5 \end{bmatrix}}$$

On a terminé la 1° transformation sous le pivot 1 on annule maintenant les termes sous le pivot a_{22}. On prend alors k=2 on aura a_{32} =0

$$\boxed{\left[A^{(2)}\right] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}}$$

i=k+1=3 j=k+1=3 $a_{33}^{2} = a_{33}^{1} \quad \frac{a_{32}^{1}}{a_{22}^{1}} a_{23}^{0} = \quad 7 \quad \frac{1}{1}(\ \ 6) = -1$

i=3 j=4 $a_{34}^{2} = a_{34}^{1} \quad \frac{a_{32}^{1}}{a_{22}^{1}} a_{24}^{0} = \quad 5 \quad \frac{1}{1}(\ \ 4) = -1$

Alors on trouve à partir de la 3° ligne x_3 = (-1)/(-1) = +1
La 2° ligne nous donne $x_2 = (a_{24} - a_{23}x_3)/a_{22}$ = (-4-(-6)*(1))/1 = +2
La 1° ligne nous donne $x_1 = (a_{14} - a_{13}x_3 - a_{12}x_2)/a_{11}$ = (10-2*1-2*2)/2 = 3

La solution {x1, x2, x3} = {+3, +2, +1}

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \\ 8 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} +3 \\ +2 \\ +1 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 26 \\ 35 \end{pmatrix}$$

<u>Système n° 02</u>

$$\begin{cases} 3x_1\ 2x_2 + \ x_3 = 2 \\ 2x_1 + \ x_2 + \ x_3 = 7 \\ 4x_1\ 3x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On prend **k=1** on annule le terme a_{21} sous le pivot a_{11}

i=2 j=2 $a_{22}^{1} = a_{22}^{0} \quad \frac{a_{21}^{0}}{a_{11}^{0}} a_{12}^{0} = 1 \quad \frac{2}{3}(\ \ 2) = +7/3$

i=2 j=3 $a_{23}^{1} = a_{23}^{0} \quad \frac{a_{21}^{0}}{a_{11}^{0}} a_{13}^{0} = 1 \quad \frac{2}{3} 1 = 1/3$

ici on pose la colonne des b_i comme la colonne n+1 de a soit $b_i = a_{in+1}$

On a alors i=2 j=4 $b_{2}^{1} = a_{24}^{0} \quad \frac{a_{21}^{0}}{a_{11}^{0}} a_{14}^{0} = 7 \quad \frac{2}{3} 2 = +17/3$

On annule ensuite le terme a_{31} sous le pivot a_{11}

i=3 j=2 $a_{32}^{1} = a_{32}^{0} \quad \frac{a_{31}^{0}}{a_{11}^{0}} a_{12}^{0} = \quad 3 \quad \frac{4}{3}(\ \ 2) = -1/3$

i=3 j=3 $a_{33}^{1} = a_{33}^{0} \quad \frac{a_{31}^{0}}{a_{11}^{0}} a_{13}^{0} = 2 \quad \frac{4}{3} 1 = +2/3$

i=3 j=4 $b_{3}^{1} = a_{34}^{0} \quad \frac{a_{31}^{0}}{a_{11}^{0}} a_{14}^{0} = 4 \quad \frac{4}{3} 2 = 4/3$

$$\boxed{\left[A^{(1)}\right] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{17}{3} \\ 0 & \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}}$$

On a terminé la 1° transformation sous le pivot 1 on annule maintenant les termes sous le pivot a_{22}

$$\left[A^{(2)}\right] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{17}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{7} & \frac{15}{7} \end{bmatrix}$$

On prend alors k=2 on aura $a_{32}=0$

i=k+1=3 j=k+1=3 $a_{33}^2 = a_{33}^1 \quad \frac{a_{32}^1}{a_{22}^1} a_{23}^0 = \frac{2}{3} + \frac{1}{7}(\frac{1}{3}) = \frac{5}{7}$

i=3 j=4 $a_{34}^2 = a_{34}^1 \quad \frac{a_{32}^1}{a_{22}^1} a_{24}^0 = \frac{4}{3} + \frac{1}{7}(\frac{17}{3}) = \frac{15}{7}$

Alors on trouve

à partir de la 3° ligne $x_3 = (15/7)/(5/7) = +3$

La 2° ligne nous donne $x_2 = (a_{24} - a_{23}x_3)/a_{22} = (\frac{17}{3} - (\frac{1}{3})*(3))/(\frac{7}{3}) = +2$

La 1° ligne nous donne $x_1 = (a_{14} - a_{13}x_3 - a_{12}x_2)/a_{11} = (2-1*3+2*2)/2 = 1$

La solution {x1, x2, x3} = {+1, +2, +3}

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} +1 \\ +2 \\ +3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 02

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 = 12 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$$

La stratégie du pivot total consiste à recherche les valeurs maximales de la matrice A est les positionnée en pivot

On peut alors permuter l'équation 1 et 3 pour avoir $a_{11} = 3 > 2 > 1$

On doit pour permuter les lignes (équations) aussi permuter b_3 avec b_1 on obtient alors

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Puis on permute la colonne 1 et 3 pour avoir $a_{11}=6 = \max(a_{ij}$ i=1,3 et j=1,3)

On doit pour permuter les colonnes aussi permuter l'inconnu x_3 avec x_1 on obtient alors

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Nouveau système equivalent à résoudre

On annule la 1° colonne sous le pivot avec k=1 on obtient $[A^{(1)}]\{X\}=\{B^{(1)}\}$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 0 & 2/3 & 1/2 \\ 0 & 2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Puis on cherche la valeur max di pivot a_{22} sur les lignes 2 et 3. C'est la valeur a_{32} donc on permute les lignes 2 et 3

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1/2 \\ 0 & 2/3 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On annule maintenant la colonne 2 sous le pivot a_{22} on obtient

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 17/3 \end{pmatrix}$$

$x_1 = 17/2$ $x_2 = (-8+1/2*(17/2))/2 = -15/8$ $x_3 = (12-3*(17/2)-2*(-15/8))/6 = -39/24$

Vérification

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 17/2 \\ 15/8 \\ 13/8 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Vérifiée donc la solution $\{x_1, x_2, x_3\}$ = {17/2 ; -15/8 ; -13/8}

Exercice N° 3

Soient les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} 3x_1 \quad 2x_2 + \ \ x_3 = 2 \\ 2x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = 7 \ (S_1) \\ 4x_1 \quad 3x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} L_{ij} = \dfrac{\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} U_{kj}\right)}{U_{jj}} & ,i>j \\ U_{ij} = \left(a_{ij} \quad \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} U_{kj}\right)_{,i\le j} \end{cases}$$

On calcul les matrices [L] et [U] en faisant varier i de 2 à n et j à chaque fois de i à n ici n=3

Posons d'abord $l_{ii} = 1$ pour i=1 à 3

$$L_{ji} = \frac{\left(a_{ji} \quad \sum_{k=1}^{i-1} L_{jk} U_{ki}\right)}{U_{ii}}_{,i>j}$$

$$U_{ij} = \left(a_{ij} \quad \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} U_{kj}\right)_{,i\le j}$$

i=1	j=1	$u_{11} = a_{11}/l_{11} = 3$	$l_{11}=1$
i=1	j=2	$u_{12} = a_{12} = -2$	$l_{21}=a_{21}/u_{11}=2/3$
i=1	j=3	$u_{13} = a_{13} = +1$	$l_{31}=a_{31}/u_{11}=4/3$
i=2	j=2	$u_{22}=a_{22} - l_{21}u_{12} = 1-(2/3)*(-2)=7/3$	$l_{22}=1$
i=2	j=3	$u_{23}=a_{23} - l_{21}u_{13} = 1-2/3*(+1)=+1/3$	$l_{32}= (a_{32} - l_{31}u_{12})/u_{22}= (-3-(4/3)*(-2))/(7/3)=-1/7$
i=3	j=3	$u_{33}=a_{33}-l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 2-4/3*(+1)-(-1/7)*(1/3)=15/21=5/7$	$l_{33}=1$

$$[L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{-1}{7} & 1 \end{bmatrix} \qquad [U] = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{7} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{-1}{7} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}}$$

$$[L]\{Z\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & \frac{-1}{7} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

$z_1 = 2/1 = 2$

$z_2 = 7-(2/3)*2 = 17/3$

$z_3 = 4-(4/3)*2-(17/3)*(-1/7) = 15/7$

$$[A]\{X\} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{Bmatrix} \ \textit{vérifié}$$

$$[U]\{X\} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{5}{7} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{Bmatrix}$$

$x_3 = (15/7) *(7/5) = 3$

$x_2 = (17/3-(1/3)*3) *(3/7) = 2$

$x_1 = (2+(2)*(2)-1*(3))/3 = 1$