

Estimation par intervalle de confiance

1/Estimation par intervalle de confiance d' une proportion :

Soit A le caractère observé dans la population ; X la (V.A) qui observe le caractère A

Pour un individu deux issues sont possibles

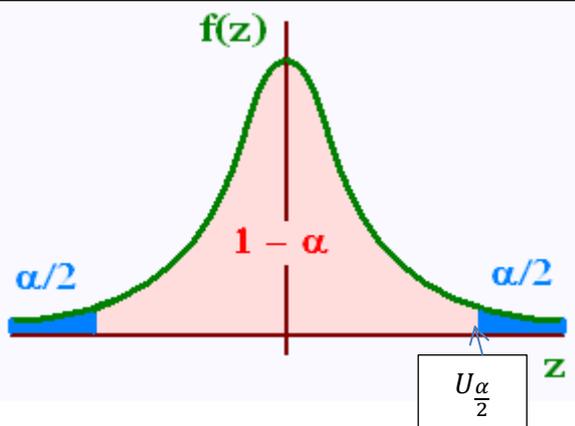
succès(avoir la caractère A)	$P(A) = p$	X suit une loi de Bernoulli
échec (ne pas avoir la caractère A)	$P(\bar{A}) = 1 - p$	

Pour $n \geq 2$,

X suit une loi de binomiale B(n,p)

Théorème

Si $n > 30, np > 5$ et $n(1 - p) > 5$ alors loi de binomiale B(n,p) peut être approximée par une loi normale $N(np; \sqrt{np(1 - p)})$

intervalle de confiance d' une proportion																				
condition d'application	IC																			
$n > 30, np > 5$ et $n(1 - p) > 5$ échantillon aléatoire simple	$IC_{pop} = \left[p - U_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}; p + U_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$																			
	La table de la loi normale N(0,1)																			
	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th>niveau de confiance</th> <th>niveaude risque α</th> <th>$F(U_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$</th> <th>$U_{\frac{\alpha}{2}}$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>90%</td> <td>10%</td> <td>0.950</td> <td>1.645</td> </tr> <tr> <td>95%</td> <td>5%</td> <td>0.975</td> <td>1.96</td> </tr> <tr> <td>98%</td> <td>2%</td> <td>0.990</td> <td>2.325</td> </tr> <tr> <td>99%</td> <td>1%</td> <td>0.995</td> <td>2.575</td> </tr> </tbody> </table>	niveau de confiance	niveaude risque α	$F(U_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$	$U_{\frac{\alpha}{2}}$	90%	10%	0.950	1.645	95%	5%	0.975	1.96	98%	2%	0.990	2.325	99%	1%	0.995
niveau de confiance	niveaude risque α	$F(U_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$	$U_{\frac{\alpha}{2}}$																	
90%	10%	0.950	1.645																	
95%	5%	0.975	1.96																	
98%	2%	0.990	2.325																	
99%	1%	0.995	2.575																	

Exemple Gregor Mendel a mené ses fameuses expériences génétiques avec des pois, un des échantillons des croisements a été obtenu en croisant **des pois à gousses vertes** et **des pois à gousses jaunes**. Cette lignée comportait **580 pois**. Parmi ces pois, **428 avait des gousses vertes** et **152 gousses jaunes**.

A partir de sa théorie des gènes, Mendel s'attendait à ce que **25%** des pois aient **des gousses jaunes**. Le pourcentage **de gousses jaunes est de 26.2%**.

- a. Trouver la marge d'erreur qui correspond à un intervalle de confiance à 95%
- b. Trouver l'intervalle de confiance à 95% de p de la population
- c. A partir de ces résultats, que pouvons-nous conclure sur la théorie de Mendel qui déclare que le pourcentage de pois à gousse jaune devrait être de 25%?

Solution

On a: $n\hat{p}=152 \geq 5, n\hat{q}=428 \geq 5$

a. $E=1.96 \sqrt{\frac{0.262 \cdot 0.738}{580}} = 0.036$

b. $IC_p=[0.226, 0.298]$ cet intervalle est décrit comme suit :

Le pourcentage de pois à gousse jaune est estimé à 26.2% avec une marge d'erreur de plus ou moins 3.6%.

c. A partir de ces résultats nous sommes sûr à 95% que les limites 22.6% et 29.8% contiennent le vrai pourcentage de pois à gousses jaunes.

Le vrai pourcentage peut être vraisemblablement n'importe quelle valeur entre ces deux limites. Comme cet intervalle contient la valeur 25%, la valeur de Mendel ne peut pas être considéré comme fausse.

2/Estimation par intervalle de confiance d'une moyenne

Soit X suit $N(\mu, \sigma^2)$

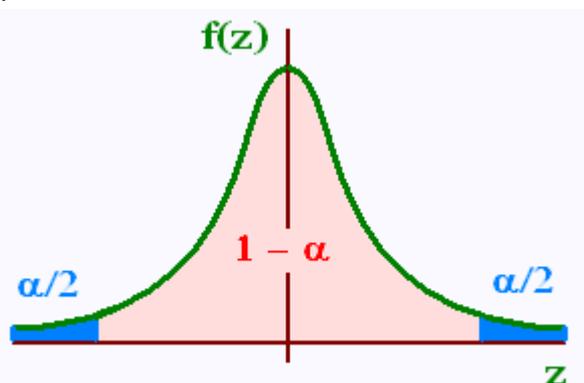
cas de variance connue

X suit $N(\mu, \sigma^2)$ ou $N > 30$

$$\mu \in \left[m - U_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; m + U_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]$$

m : moyenne estimée

$U_{\alpha/2}$ est lue sur la table normale



cas de variance inconnue

X suit $N(\mu, \sigma^2)$ ou $N > 30$ ou $N \leq 30$

échantillon aléatoire simple

$$\mu \in \left[m - t_{\frac{\alpha}{2};v} \frac{S_{est}}{\sqrt{n}}; m + t_{\frac{\alpha}{2};v} \frac{S_{est}}{\sqrt{n}} \right]$$

m : moyenne estimée.

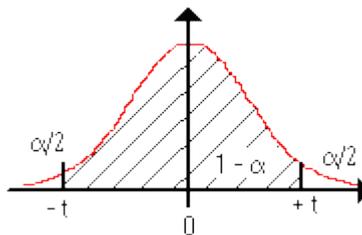
σ : écart-type de la population or **ici il est inconnu** on va **le remplacer** par l' écart-type estimé S_{est}

$t_{\frac{\alpha}{2};v}$: une valeur lue sur la table Student

un d.d.l (v=n-1)

$$\mu \in \left[m - t_{\frac{\alpha}{2};v} \frac{S_{est}}{\sqrt{n}}; m + t_{\frac{\alpha}{2};v} \frac{S_{est}}{\sqrt{n}} \right]$$

niveau de confiance	niveaude risque α	$F(U_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$	$U_{\frac{\alpha}{2}}$
90%	10%	0.950	1.645
95%	5%	0.975	1.96
98%	2%	0.990	2.325
99%	1%	0.995	2.575



comme l'intervalle de confiance et aussi bilatérale donc on lit directement de la table

$$\alpha_{risque} = \alpha_{table}$$

pour $\alpha = 0,05$ et $v=24$

$\downarrow v/\alpha \rightarrow$	0.9	0.8	0.7	0.6	0.05	.02	0.01
1	0.1584	0.3249	0.5095	0.7265	1	12.706	31.821	63.656
...				
24	0.127	0.2562	0.39	0.5314	0.6848	2.0639	2.4922	0.127

Exemple 1 « Température du corps humain ».

Pour un échantillon des températures corporelles, on a $n=106$ et $\bar{x}=36.78^{\circ}\text{C}$.

Supposer que l'échantillon est un échantillon aléatoire simple et que σ est connue et vaut 0.34°C .

➤ Donner l'intervalle de confiance à 95% de la température corporelle.

Il faut d'abord vérifier les conditions requises pour estimer μ

On a la normalité de la population et $n>30$.

$n>30$ est suffisante même si on n'a pas la normalité.

$$E = t_{\frac{\alpha}{2}} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \frac{0.34}{\sqrt{106}} = 0.06$$

$$IC_{\mu} = [36.72, 36.84]$$

Exemple 2 Considérons l'exemple de la température corporelle mais avec l'écart type estimé $s=0.34$.

Les conditions requises pour l'estimation de μ sont satisfaites.

(n étant >30 , on n'a pas besoin de vérifier la normalité)

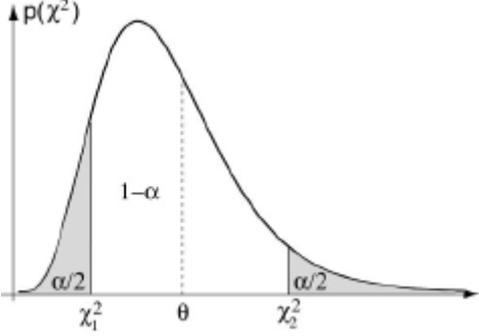
pour $\alpha=0.05$, $n-1=105$ on a $t_{\alpha/2, n-1}=1.984$

$$E = t_{\frac{\alpha}{2}} * \frac{s}{\sqrt{n}} = 1.984 \frac{0.34}{\sqrt{106}} = 0.06$$

$IC_{\mu} = [36.72, 36.84]$

Interprétation à partir des résultats de l'échantillon on peut être sûr à 95% que l'intervalle [36.72; 36.84] contient effectivement la vraie valeur de la moyenne de la population

3/ Estimation par intervalle de confiance d'une variance

intervalle de confiance d'une variance σ^2	
conditions d'application	IC
<ul style="list-style-type: none"> * l'échantillon est aléatoire simple * la population doit avoir une distribution normale (même si $n > 30$). 	$IC_{\sigma^2} = \left[\frac{(n-1)S_{est}^2}{\chi_1^2}, \frac{(n-1)S_{est}^2}{\chi_2^2} \right]$ <p style="text-align: center;">un d.d.l (v=n-1)</p>
	$F(\chi_1^2) = 1 - \frac{\alpha}{2}; F(\chi_2^2) = \frac{\alpha}{2}$ <p>si N est assez grand et ne se trouve pas dans la table du χ^2; on fait une approximation par la loi normale</p> <p>théorème si X suit une loi du χ^2 si le d.d.l > 30 alors la (V.A) $U = \frac{\sqrt{2X^2} - \sqrt{2v-1}}{\sqrt{2}}$ suit une loi normale $N(0,1)$</p>

Exercice dans un échantillon de taille $n=20$ on a pu établir une estimation de la variance d'une (V.A) X

$$S_{est}^2 = 25.3$$

Donner un IC de la variance au risque 5%. Refaire l'exercice pour $N=45$

Exemple : « Températures corporelles »

On liste 106 températures corporelles prises par des chercheurs. Supposer que c'est un échantillon simple et utiliser les caractéristiques suivantes pour construire un **intervalle de confiance à 95%** de l'écart type pour les températures corporelles de l'ensemble de la population.

- a. D'après la représentation graphique (histogramme) de l'échantillon, **Il n'y a pas de valeurs extrêmes** et les **données semblent suivre une loi normale**.

$$\bar{x} = 36.78^{\circ}\text{C}, s = 0.34^{\circ}\text{C}, n = 106$$

Solution

1. La condition de normalité est satisfaite.
2. **n=106, le ddl=106-1=105** . Si ce ddl n'est pas dans la table, nous prendrons la valeur la plus proche. Par exemple **ddl=100**.
3. Pour un niveau de confiance 95%, on se réfère aux valeurs 0.975 et 0.025 comme en-têtes de colonnes, On a pour **ddl=105** : $\chi^2_1 = 78,54$, $\chi^2_2 = 135,2$
4. Pour **ddl=100** : $\chi^2_1 = 74.22$, $\chi^2_2 = 129.561$
5. $IC_{\sigma^2} = \left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_2}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_1} \right]$
6. $IC_{\sigma^2} = \left[\frac{(106-1) \cdot (0.34)^2}{135.2}, \frac{(106-1) \cdot (0.34)^2}{78.54} \right]$
7. $IC_{\sigma^2} = [0.0898, 0.155]$
8. Si on prend la racine carré $IC_{\sigma} = [0.3, 0.39]$