Faculté des Sciences
Dept. Mathématiques
Prof. M. Benalili
m_benalili@yahoo.fr
Module de géométrie différentielle
3ième année de Mathématiques

Série d'exercices " Espaces tangents "

Exercice1

Parmi les sous-ensembles suivants, lesquels sont des surfaces de $R^3$ et déterminer leur espace tangent en chaque point:

$$\left\{(x,y,z)\in R^3 : x^2+y^2+z^2-3xyz=1\right\},$$
$$T^2=\left\{(x,y,z)\in R^3 : \left(\sqrt{x^2+y^2}-2\right)^2+z^2=1,\right\}$$
$$H_c=\left\{(x,y,z)\in R^3 : x^2+y^2-z^2=c\right\}$$

Exercice2

Soit $f: M_n(R)\to R$ de classe $C^\infty$ définie par $f(A)=det(A)$.

1) Montrer que

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{\det\left(id_n+\lambda X\right)-1}{\lambda}=trace(X)$$

(penser au polynôme caractéristique). En déduire $D_{id_n}f(X)$.

2) En remarquant que $\frac{det(A+\lambda X)-det(A)}{\lambda}$ est égal à $det(A)$ $\frac{det(id_n+\lambda A^{-1}X)-1}{\lambda}$ pour $A$ inversible, calculer $D_A f(X)$ lorsque $A$est inversible.

3) Montrer que $Sl_n(R)$=$\{M\in M_n(R):\det(M)=1\}$ est une sous-variété de $M_n(R)$, de dimension $n^2-1$, dont l'espace tangent en $id_n$ est $\{X\in M_n(R): trace(X)=0\}$.

Exercice3

Montrer que $Sl_n\left(R\right)$=$\{M\in M_n(R):\det(M)=1\}$ est une hypesurface de classe $C^\infty$ de $M_n\left(R\right)$. Montrer que l'espace tangent à $Sl_n\left(R\right)$ en $A$ est

$T_A Sl_n\left(R\right)$=$\{M\in M_n(R):\det(A^{-1}M)=0\}$.