

Théorie de l'Elasticité

Abdellatif MEGNOUNIF

Application 3

Tenseur des contraintes **Contraintes et Directions** **Principales**

Introduction

Le but de cette application est de calculer les contraintes et directions principales d'un tenseur quelconque.

Comment on passera de forces réparties en forces concentrées

Exemple

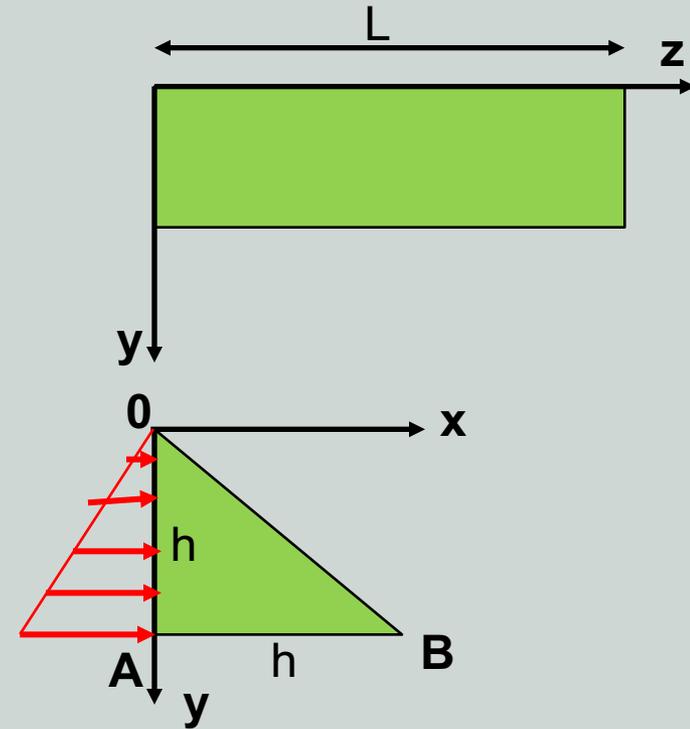
La distribution de contraintes d'une poutre de masse volumique constante « ρ » et dont la section droite est un triangle rectangle isocèle OAB de coté « h », (la poutre a la forme d'un prisme triangulaire de génératrice parallèle à l'axe « z ») est donnée par :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= a_1 \cdot x + b_1 \cdot y & ; & \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \\ \sigma_y &= a_2 \cdot x + b_2 \cdot y & ; & \tau_{xy} = a_3 \cdot x + b_3 \cdot y \\ \sigma_z &= \frac{\lambda}{2 \cdot (\lambda + G)} \cdot (\sigma_x + \sigma_y)\end{aligned}$$

Où « λ » et « G » sont deux constantes positives données dépendant du matériau.

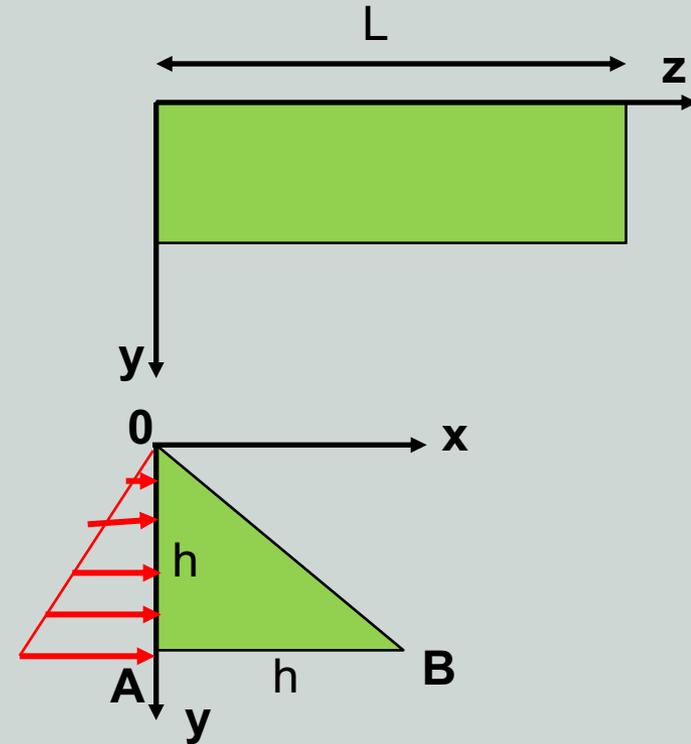
a_1, b_1, a_2, b_2, a_3 et b_3 sont des constantes quelconques à déterminer

On suppose que la face « OA » est soumise à une densité de forces de composantes $(\alpha \cdot y, 0, 0)$ où « α » est une constante positive et que la face « OB » n'est pas chargée.



Exemple

- i) Déterminer les constantes a_1, b_1, a_2, b_2, a_3 et b_3
- ii) Donner les contraintes et directions principales en un point quelconque de la face « OA » puis en un point quelconque de la face « OB ».
- iii) Déterminer les forces extérieures appliquées sur la face « AB »



Rem : Le poids propre de la poutre n'est pas négligé

Solution

$$\begin{aligned} \sigma_x &= a_1 \cdot x + b_1 \cdot y ; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \\ \sigma_y &= a_2 \cdot x + b_2 \cdot y ; \quad \tau_{xy} = a_3 \cdot x + b_3 \cdot y \\ \sigma_z &= \frac{\lambda}{2 \cdot (\lambda + G)} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned}$$

i) Déterminons a_1, b_1, a_2, b_2, a_3 et b_3

Vérification des équations d'équilibre

Equilibre

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned}$$

Le poids propre n'est pas négligé et la direction verticale étant l'axe « y », on aura alors :

$$X=0; Y= \rho g \text{ et } Z=0$$

D'où avec notre tenseur on aura:

Ainsi

$$\begin{aligned} a_1 + b_3 &= 0 \\ a_3 + b_2 + \rho \cdot g &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 + b_3 &= 0 & (1) \\ a_3 + b_2 + \rho \cdot g &= 0 & (2) \end{aligned}$$

Vérifiée

Solution

Conditions aux limites

$$\bar{X} = l \cdot \sigma_x + m \cdot \tau_{xy} + n \cdot \tau_{xz}$$

$$\bar{Y} = l \cdot \tau_{xy} + m \cdot \sigma_y + n \cdot \tau_{yz}$$

$$\bar{Z} = l \cdot \tau_{xz} + m \cdot \tau_{yz} + n \cdot \sigma_z$$

Face « OA »:

Définie par : $x=0$; $(l,m,n)=(-1,0,0)$ et chargée par $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})=(\alpha \cdot y, 0, 0)$

$$\bar{X} = \alpha \cdot y = (-1) \cdot (a_1 x + b_1 y)$$

$$\bar{Y} = 0 = (-1) \cdot (a_3 x + b_3 y)$$

$$\bar{Z} = 0 = 0$$

Soit:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \alpha \cdot y = -a_1 x - b_1 y = -b_1 y \\ \bar{Y} &= 0 = -a_3 x - b_3 y \end{aligned}$$

Par identification on aura:

$$\alpha \cdot y = -b_1 y$$

Soit

$$-b_3 y = 0$$

$$b_1 = -\alpha \quad (3)$$

$$b_3 = 0 \quad (4)$$

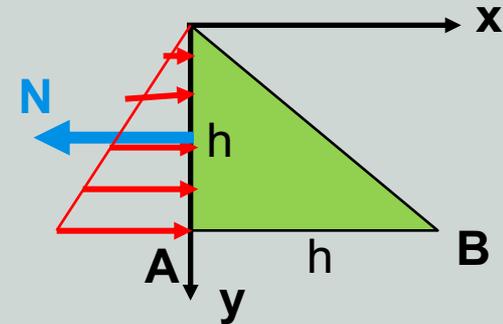
(1)

$$\begin{aligned} a_1 + b_3 &= 0 \\ a_3 + b_2 + \rho \cdot g &= 0 \end{aligned}$$

En remplaçant (4) dans (1)
on obtient:

$$a_1 = 0 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= a_1 \cdot x + b_1 \cdot y ; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \\ \sigma_y &= a_2 \cdot x + b_2 \cdot y ; \quad \tau_{xy} = a_3 \cdot x + b_3 \cdot y \\ \sigma_z &= \frac{\lambda}{2 \cdot (\lambda + G)} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned}$$



Solution

Conditions aux limites

$$\bar{X} = l \cdot \sigma_x + m \cdot \tau_{xy} + n \cdot \tau_{xz}$$

$$\bar{Y} = l \cdot \tau_{xy} + m \cdot \sigma_y + n \cdot \tau_{yz}$$

$$\bar{Z} = l \cdot \tau_{xz} + m \cdot \tau_{yz} + n \cdot \sigma_z$$

Face « OB »:

Définie par : $x=y$; $(l,m,n) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ et non chargée par $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}) = (0,0,0)$

$$\bar{X} = 0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (a_1 x + b_1 y) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (a_3 x + b_3 y)$$

$$\bar{Y} = 0 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (a_3 x + b_3 y) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (a_2 x + b_2 y)$$

$$\bar{Z} = 0 = 0$$

avec

$$a_1 = 0$$

$$b_1 = -\alpha$$

$$b_3 = 0$$

On aura:

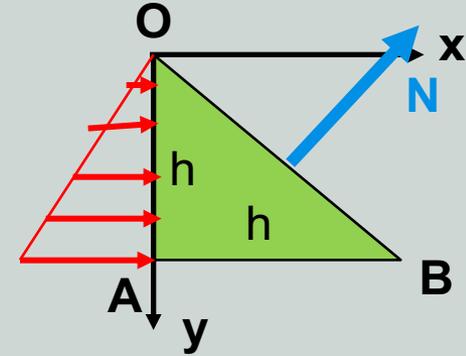
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (-\alpha y - a_3 x) = 0$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (a_3 x - a_2 x - b_2 y) = 0$$

$$\sigma_x = a_1 \cdot x + b_1 \cdot y ; \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

$$\sigma_y = a_2 \cdot x + b_2 \cdot y ; \tau_{xy} = a_3 \cdot x + b_3 \cdot y$$

$$\sigma_z = \frac{\lambda}{2 \cdot (\lambda + G)} \cdot (\sigma_x + \sigma_y)$$



Solution

soit

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (-\alpha y - a_3 x) = 0$$
$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot (a_3 x - a_2 x - b_2 y) = 0$$

Avec : $x=y$

$$\begin{aligned} (-\alpha y - a_3 x) &= 0 & ; & & a_3 x &= -\alpha \cdot y = -\alpha \cdot x \\ (a_3 x - a_2 x - b_2 y) &= 0 & & & & \end{aligned} \quad (6)$$

De la 1^{ère} par identification, on aura $a_3 = -\alpha$

Or de l'équation (2), $a_3 + b_2 + \rho \cdot g = 0$ On aura $b_2 = \alpha - \rho \cdot g$

De l'équation (6), on peut tirer $(a_3 x - a_2 x - b_2 y) = 0$; $(-\alpha \cdot x - a_2 x - (\alpha - \rho \cdot g) \cdot x) = 0$

Soit $a_2 x = (-2 \cdot \alpha \cdot x + \rho \cdot g \cdot x) = (\rho \cdot g - 2 \cdot \alpha) \cdot x$

Par identification $a_2 = (\rho \cdot g - 2 \cdot \alpha)$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= a_1 \cdot x + b_1 \cdot y & ; & & \tau_{xz} &= \tau_{yz} = 0 \\ \sigma_y &= a_2 \cdot x + b_2 \cdot y & ; & & \tau_{xy} &= a_3 \cdot x + b_3 \cdot y \\ \sigma_z &= \frac{\lambda}{2 \cdot (\lambda + G)} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned}$$

$$(2) \quad \begin{aligned} a_1 + b_3 &= 0 \\ a_3 + b_2 + \rho \cdot g &= 0 \end{aligned}$$

Solution

Ainsi, on a toutes les constantes

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 & ; & & a_2 &= (\rho \cdot g - 2 \cdot \alpha) & ; & & a_3 &= -\alpha \\ b_1 &= -\alpha & ; & & b_2 &= \alpha - \rho \cdot g & & ; & & b_3 &= 0 \end{aligned}$$

Avec ces constantes, le tenseur des contraintes devient:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\alpha \cdot y \\ \sigma_y &= (\rho \cdot g - 2 \cdot \alpha) \cdot x + (\alpha - \rho \cdot g) \cdot y \\ \sigma_z &= \frac{\lambda}{2 \cdot (\lambda + G)} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \\ \tau_{xy} &= -\alpha \cdot x \\ \tau_{xz} &= 0 \\ \tau_{yz} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_x &= a_1 \cdot x + b_1 \cdot y & ; & & \tau_{xz} &= \tau_{yz} &= 0 \\ \sigma_y &= a_2 \cdot x + b_2 \cdot y & ; & & \tau_{xy} &= a_3 \cdot x + b_3 \cdot y \\ \sigma_z &= \frac{\lambda}{2 \cdot (\lambda + G)} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \end{aligned}$$

Solution

ii) Contraintes et directions principales

Face OA $X=0$

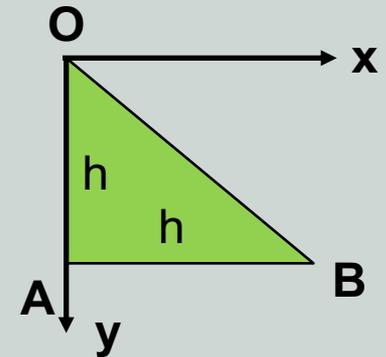
Le tenseur devient:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\alpha \cdot y \\ \sigma_y &= (\alpha - \rho \cdot g) \cdot y \\ \sigma_z &= \frac{\lambda}{2 \cdot (\lambda + G)} \cdot (-\rho \cdot g \cdot y) \\ \tau_{xy} &= \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0\end{aligned}$$

En tenseur, on aura

$$[\sigma]_{OA} = \begin{bmatrix} -\alpha \cdot y & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha - \rho \cdot g) \cdot y & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\lambda}{2(\lambda + G)} \cdot \rho \cdot g \cdot y \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\alpha \cdot y \\ \sigma_y &= (\rho \cdot g - 2 \cdot \alpha) \cdot x + (\alpha - \rho \cdot g) \cdot y \\ \sigma_z &= \frac{\lambda}{2 \cdot (\lambda + G)} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \\ \tau_{xy} &= -\alpha \cdot x; \tau_{xz} = 0; \tau_{yz} = 0\end{aligned}$$



Solution

Face OA

$$[\sigma]_{OA} = \begin{bmatrix} -\alpha \cdot y & 0 & 0 \\ 0 & (\alpha - \rho \cdot g) \cdot y & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\lambda}{2(\lambda + G)} \cdot \rho \cdot g \cdot y \end{bmatrix}$$

Toutes les contraintes tangentielles sont nulles, ce qui veut qu'on a que des contraintes normales principales:

Contraintes principales

$$\sigma_1 = -\alpha \cdot y \quad ; \quad \sigma_2 = (\alpha - \rho \cdot g) \cdot y \quad ; \quad \sigma_3 = \frac{-\lambda}{2(\lambda + G)} \cdot \rho \cdot g \cdot y$$

Directions principales

Les directions principales des points de la face « OA » sont directement les axes « x », « y » et « z ».

Solution

Face OB

Le tenseur devient:

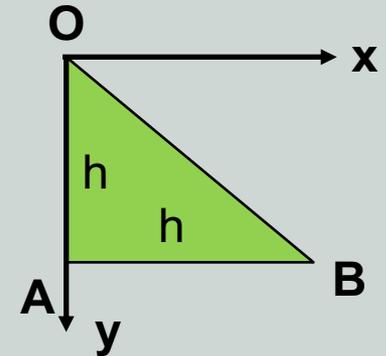
$x=y$

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\alpha \cdot x \\ \sigma_y &= -\alpha \cdot x \\ \sigma_z &= \frac{\lambda}{(\lambda + G)} \cdot \alpha \cdot x \\ \tau_{xy} &= -\alpha \cdot x \\ \tau_{xz} &= \tau_{yz} = 0\end{aligned}$$

En tenseur, on aura

$$[\sigma]_{OB} = -\alpha \cdot x \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{(\lambda + G)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\alpha \cdot y \\ \sigma_y &= (\rho \cdot g - 2 \cdot \alpha) \cdot x + (\alpha - \rho \cdot g) \cdot y \\ \sigma_z &= \frac{\lambda}{2 \cdot (\lambda + G)} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \\ \tau_{xy} &= -\alpha \cdot x; \tau_{xz} = 0; \tau_{yz} = 0\end{aligned}$$



Solution

Face OB

$$[\sigma]_{OB} = -\alpha \cdot x \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{(\lambda + G)} \end{bmatrix}$$

Les contraintes principales:

$$\sigma_3 = \frac{-\lambda}{(\lambda + G)} \cdot \alpha \cdot x$$

Les 02 autres s'obtiennent par la résolution du problème propre

$$([\sigma] - \sigma[I]) \cdot \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = 0 \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} -\alpha \cdot x - \sigma & -\alpha \cdot x & 0 \\ -\alpha \cdot x & -\alpha \cdot x - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\lambda}{(\lambda + G)} \cdot \alpha \cdot x - \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = 0$$

Le déterminant = 0;

$$(-\alpha \cdot x - \sigma) \cdot \left[(-\alpha \cdot x - \sigma) \cdot \left(\frac{-\lambda}{(\lambda + G)} \cdot \alpha \cdot x - \sigma \right) \right] + \alpha \cdot x \left[(-\alpha \cdot x) \cdot \left(\frac{-\lambda}{(\lambda + G)} \cdot \alpha \cdot x - \sigma \right) \right] = 0$$

La résolution nous donne les 02 autres contraintes principales:

$$\sigma_1 = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_2 = -2 \cdot \alpha \cdot x$$

Solution

Face OB

$$[\sigma]_{OB} = -\alpha \cdot x \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{(\lambda + G)} \end{bmatrix}$$

$$l_3 = 0 ; m_3 = 0 \text{ et } n_3 = \pm 1$$

$$\begin{pmatrix} -\alpha \cdot x - \sigma & -\alpha \cdot x & 0 \\ -\alpha \cdot x & -\alpha \cdot x - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\lambda}{(\lambda + G)} \cdot \alpha \cdot x - \sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} = 0$$

Pour $\sigma_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} -\alpha \cdot x - 0 & -\alpha \cdot x & 0 \\ -\alpha \cdot x & -\alpha \cdot x - 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\lambda}{(\lambda + G)} \cdot \alpha \cdot x - 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = 0$$

$$-\alpha \cdot x \cdot l_1 - \alpha \cdot x \cdot m_1 = 0$$

$$\text{d'où } l_1 = -m_1$$

$$-\alpha \cdot x \cdot l_1 - \alpha \cdot x \cdot m_1 = 0$$

$$\text{Or } l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$$

$$\frac{-\lambda}{(\lambda + G)} \cdot \alpha \cdot x \cdot n_1 = 0$$

$$\text{d'où } n_1 = 0$$

$$2 \cdot l_1^2 = 1 \quad ; \quad l_1^2 = \frac{1}{2}$$

En remplaçant on aura

$$l_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} ; m_1 = \mp \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } n_1 = 0$$

Solution

Face OB

$$[\sigma]_{OB} = -\alpha \cdot x \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{(\lambda + G)} \end{bmatrix}$$

Pour $\sigma_2 = -2 \cdot \alpha \cdot x$

$$\begin{pmatrix} -\alpha \cdot x - (-2 \cdot \alpha \cdot x) & -\alpha \cdot x & 0 \\ -\alpha \cdot x & -\alpha \cdot x - (-2 \cdot \alpha \cdot x) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\lambda}{(\lambda + G)} \cdot \alpha \cdot x - (-2 \cdot \alpha \cdot x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$+\alpha \cdot x \cdot l_2 - \alpha \cdot x \cdot m_2 = 0 \quad \text{d'où} \quad l_2 = m_2$$

$$-\alpha \cdot x \cdot l_2 + \alpha \cdot x \cdot m_2 = 0$$

$$\left(\frac{-\lambda}{(\lambda + G)} \cdot \alpha \cdot x + 2 \cdot \alpha \cdot x\right) \cdot n_2 = 0 \quad \text{d'où} \quad n_2 = 0$$

$$\text{Or } l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1$$

$$2 \cdot l_2^2 = 1 \quad ; \quad l_2^2 = \frac{1}{2}$$

En remplaçant on aura

$$l_2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad m_2 = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad n_2 = 0$$

Solution

iii) Calcul des forces sur la face AB ?

Face AB $y=h$ $(l,m,n)=(0,1,0)$

Les conditions aux limites seront:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= l \cdot \sigma_x + m \cdot \tau_{xy} + n \cdot \tau_{xz} \\ \bar{Y} &= l \cdot \tau_{xy} + m \cdot \sigma_y + n \cdot \tau_{yz} \\ \bar{Z} &= l \cdot \tau_{xz} + m \cdot \tau_{yz} + n \cdot \sigma_z \end{aligned}$$

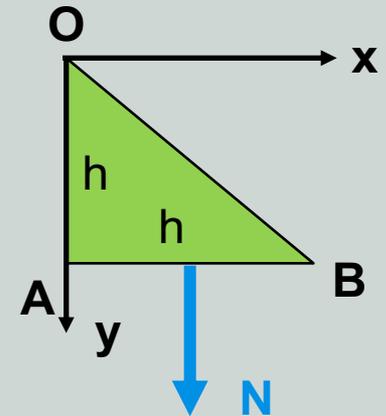
Soit:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= -\alpha \cdot x \\ \bar{Y} &= (\rho \cdot g - 2 \cdot \alpha) \cdot x + (\alpha - \rho \cdot g) \cdot h \\ \bar{Z} &= 0 \end{aligned}$$

La face « AB » est chargée suivant « x » et suivant « y ».

On peut calculer les résultantes de ces forces pour avoir les forces extérieures correspondantes

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\alpha \cdot y \\ \sigma_y &= (\rho \cdot g - 2 \cdot \alpha) \cdot x + (\alpha - \rho \cdot g) \cdot y \\ \sigma_z &= \frac{\lambda}{2 \cdot (\lambda + G)} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \\ \tau_{xy} &= -\alpha \cdot x; \tau_{xz} = 0; \tau_{yz} = 0 \end{aligned}$$



Solution

Face AB

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\alpha \cdot y \\ \sigma_y &= (\rho \cdot g - 2 \cdot \alpha) \cdot x + (\alpha - \rho \cdot g) \cdot y \\ \sigma_z &= \frac{\lambda}{2 \cdot (\lambda + G)} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \\ \tau_{xy} &= -\alpha \cdot x; \tau_{xz} = 0; \tau_{yz} = 0\end{aligned}$$

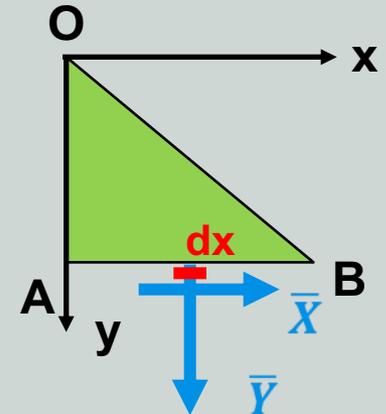
En prenant la somme de toutes les forces élémentaires, on aura:

$$R_x = \int_0^h \bar{X} dx$$

$$R_x = \int_0^h -\alpha \cdot x dx$$

$$R_y = \int_0^h \bar{Y} dx$$

$$R_y = \int_0^h (\rho \cdot g - 2 \cdot \alpha) \cdot x + (\alpha - \rho \cdot g) \cdot dx$$



Soit:

$$R_x = -\alpha \cdot \frac{h^2}{2}$$

$$R_y = -\rho \cdot g \cdot \frac{h^2}{2}$$

$$R_z = -0$$

C'est l'équivalent du chargement extérieure appliqué sur la face « AB »

Merci. Fin de l'Application
3