Équations Hyperboliques - Equation des Ondes

1. Introduction

L'équation des ondes est l'équation type des équations hyperboliques.
Elle se présente sous la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0 \qquad (E)$$

Cette équation décrit les phénomènes de propagation et les phénomènes vibratoires.
Une solution de (E) est une fonction u qui dépend des variables spatiales $x_1, x_2, \dots, x_n$ et de t variable temps.
Si on pose $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ alors u est définie pour $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

- Si $n = 1$ les solutions de (E) sont appelées les ondes planes.
- Si $n = 2$ les solutions de (E) sont appelées les ondes cylindriques.
- Si $n = 3$ les solutions de (E) sont appelées les ondes sphériques.

La constante c représente une vitesse ou une célirité.

2. Résolution de l'équation (E) pour $n = 1$- Formule de D'Alembert

On rajoute à l'équation (E) des conditions initiales. Soit alors le problème $(\mathcal{P})$ suivant

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad t > 0, -\infty < x < +\infty \\ \left.\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= g(x) \end{aligned}\right\} (CI) \end{cases}$$

- $(\mathcal{P})$ décrit le mouvement (vibration) d'une corde ou une onde infinie.
- $(\mathcal{P})$ peut-être résolu par la transformée de Fourier (en x) ou par la transformée de Laplace (en t).

Une autre méthode pour traiter le problème $(\mathcal{P})$ est celle qui aboutit à **la Formule de D'Alembert** et que nous allons appliquer pour déterminer la solution de $(\mathcal{P})$.

Soit l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (A)$$

On fait le changement de variables suivant

$$r = x - ct, \quad s = x + ct$$

et on pose $u(x,t) = v(r,s)$ alors

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial t} = -c\frac{\partial v}{\partial r} + c\frac{\partial v}{\partial s} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial s}.$$

a_bensedik@mail.univ-tlemcen.dz

Par la règle des chaines nous obtenons

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -c\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial s}\right) = -c\left(-c\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + c\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s} - \left(-c\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s} + c\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right)\right)$$

Donc

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s} + \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right).$$

De la même manière nous obtenons

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s} + \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}.$$

En remplaçant dans l'équation (A) nous avons

$$c^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s} + \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right) = c^2\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s} + \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}\right)$$

et comme $c^2 > 0$ alors nous aboutissons à l'équation réduite suivante

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial s} = 0 \qquad (AL)$$

Résolvons l'équation (AL)

$$(AL) \Longrightarrow \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right) = 0 \Longrightarrow \frac{\partial v}{\partial s} = F(s)$$

car la fonction $\partial v / \partial s$ est constante par rapport à r.
D'où

$$v(r,s) = \int F(s)ds = \varphi(s) + \psi(r).$$

Finalement puisque $u(x,t) = v(r,s), r = x - ct$ et $s = x + ct$ nous déduisons que

$$u(x,t) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct) \qquad (*)$$

Exploitons les conditions initiales,

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \varphi(x) + \psi(x) = f(x) & (1) \\ c\varphi'(x) - c\psi'(x) = g(x). & (2) \end{cases}$$

Par intégration de (2) entre x_0 et x nous obtenons le système

$$\begin{cases} \varphi(x) + \psi(x) = f(x) \\ \varphi(x) - \psi(x) = \dfrac{1}{c}\displaystyle\int_{x_0}^{x} g(y)dy + K \end{cases}$$

où $K = K(x_0, c)$ est une constante dépendant de x_0 et c.
D'où l'on tire

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(y)dy + \frac{K}{2}, \qquad \psi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(y)dy - \frac{K}{2}.$$

Remplaçons dans l'expression $(*)$ de u

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(f(x+ct) + f(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x+ct} g(y)dy - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x-ct} g(y)dy$$

Ce qui donne finalement

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(f(x+ct) + f(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy.$$

C'est la **formule de D'Alembert**, elle exprime u en fonction de f et g.
On peut l'écrire sous la forme

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\big(u(x+ct,0) + u(x-ct,0)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} u_t(y,0)dy$$

et donc la solution u est s'exprime en fonction des conditions initiales.

Remarque: Cette formule n'est valable que si <u>x parcourt $\mathbb{R}$ tout entier</u>.

Exemple:

Donner la solution u du problème $(\mathcal{P})$ si u vérifie les conditions initiales suivantes:

a. $u(x,0) = \sin x, \quad u_t(x,0) = 0.$
b. $u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \cos x.$
c. $u(x,0) = e^{-x}, \quad u_t(x,0) = \ln(1+x^2).$

3. **Résolution de l'équation (E) par la méthode de séparation des variables**

a. $\boldsymbol{n = 3}$.

Considérons dans $\mathbb{R}^3$ le parallélogramme $\mathcal{K} =]0, a[\times]0, b[\times]0, c[$
et soit le problème suivant

$$(Q)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}; \ \ t > 0, (x, y, z) \in \mathcal{K} \\ \left.\begin{array}{l} u(x, y, z, 0) = f(x, y, z); \ (x, y, z) \in \mathcal{K} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x, y, z, 0) = g(x, y, z); \ (x, y, z) \in \mathcal{K} \end{array}\right\} (CI) \\ \qquad u = 0 \text{ sur les faces de } \mathcal{K} \end{cases}$$

On suppose que les fonctions f et g sont nulles sur les faces de $\mathcal{K}$.
On cherche une solution sous la forme

$$u(x, y, z, t) = X(x)\, Y(y) Z(z) T(t),$$

l'équation s'écrira donc

$$XYZT'' = X''YZT + XY''ZT + XYZ''T.$$

En divisant les deux membres par $XYZT \neq 0$ nous obtenons

$$\frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z}.$$

Comme les variables sont indépendantes, il existe une constante réelle k telle que

$$\frac{T''}{T} = k = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} \ ;$$

et pour la même raison,

$$\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}; \ \ \frac{X''}{X} = \alpha, \qquad \frac{Y''}{Y} = \beta, \qquad \frac{Z''}{Z} = \gamma \quad \text{et} \quad \alpha + \beta + \gamma = k.$$

Résolvons l'équation en X.

$$\frac{X''}{X} = \alpha \Longrightarrow X'' - \alpha X = 0$$

Son équation caractéristique est $r^2 = \alpha$.

- Si $\alpha \geq 0$, puisque $X(0) = X(a) = 0$ (car u est nulle sur les faces de $\mathcal{K}$) alors $X \equiv 0$.

- Si $\alpha < 0$ alors $r = \pm i\sqrt{-\alpha}$ où $i^2 = -1$ et nous avons

$$X(x) = C_1 \cos\left(x\sqrt{-\alpha}\right) + C_2 \sin\left(x\sqrt{-\alpha}\right).$$

Les conditions aux limites donnent

$$X(0) = X(a) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 \sin\left(a\sqrt{-\alpha}\right) = 0. \end{cases}$$

Comme X ne doit pas être identiquement nulle, on prend $\sin\left(a\sqrt{-\alpha}\right) = 0$.
Ce qui implique que $a\sqrt{-\alpha} = l\pi$ avec $l \in \mathbb{N}^*$, d'où

$$\alpha = -\frac{l^2\pi^2}{a^2}, \qquad l \in \mathbb{N}^*.$$

Et nous obtenons ainsi la famille de solutions de l'équation en X;

$$X_l(x) = A_l \sin\left(\frac{l\pi}{a}x\right); \;\; l \in \mathbb{N}^*,\; A_l \in \mathbb{R}.$$

De la même manière nous avons

$$\beta = -\frac{m^2\pi^2}{b^2}, \;\; Y_m(y) = B_m \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right); \;\; m \in \mathbb{N}^*, B_m \in \mathbb{R},$$
$$\gamma = -\frac{n^2\pi^2}{c^2}, \;\; Z_n(z) = C_n \sin\left(\frac{n\pi}{c}z\right); \;\; n \in \mathbb{N}^*, C_n \in \mathbb{R}.$$

Résolution de l'équation en T: $T'' = kT$.
On a $k = \alpha + \beta + \gamma$ d'où

$$k = -\left(\frac{l^2\pi^2}{a^2} + \frac{m^2\pi^2}{b^2} + \frac{n^2\pi^2}{c^2}\right) < 0.$$

Posons alors $k = -\delta^2$ avec $\delta = \pi\sqrt{l^2a^{-2} + m^2b^{-2} + n^2c^{-2}}$.
L'équation devient $T'' + \delta^2 T = 0$, elle admet pour famille de solutions

$$T_{l,m,n}(t) = D_{l,m,n}\cos(\delta t) + E_{l,m,n}\sin(\delta t)\,; \qquad D_{l,m,n}, E_{l,m,n} \in \mathbb{R}.$$

Finalement par le principe de superposition nous écrivons

$$u(x,y,z,t) = \sum_{l,m,n\in\mathbb{N}^*} X_l(x)\,Y_m(y)Z_n(z)T_{l,m,n}(t)$$

donc

$$u(x,y,z,t) = \sum_{l,m,n\in\mathbb{N}^*} \left(K_{l,m,n}\cos(\delta t) + L_{l,m,n}\sin(\delta t)\right)\sin\left(\frac{l\pi}{a}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{n\pi}{c}z\right).$$

Il nous reste à déterminer les coefficients $K_{l,m,n}$ et $L_{l,m,n}$.
Des conditions initiales $u(x,y,z,0) = f(x,y,z)$ et $u_t(x,y,z,0) = g(x,y,z)$ nous obtenons

$$\begin{cases} f(x,y,z) = \displaystyle\sum_{l,m,n\in\mathbb{N}^*} K_{l,m,n}\sin\left(\frac{l\pi}{a}x\right)\,\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{n\pi}{c}z\right) \\ g(x,y,z) = \displaystyle\sum_{l,m,n\in\mathbb{N}^*} \delta L_{l,m,n}\sin\left(\frac{l\pi}{a}x\right)\,\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{n\pi}{c}z\right). \end{cases}$$

On reconnaît les coefficients de Fourier :

$$K_{l,m,n} = \frac{8}{abc}\int_0^a\int_0^b\int_0^c f(x,y,z)\sin\left(\frac{l\pi}{a}x\right)\,\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{n\pi}{c}z\right)dzdydx$$
$$L_{l,m,n} = \frac{8}{abc\delta}\int_0^a\int_0^b\int_0^c g(x,y,z)\sin\left(\frac{l\pi}{a}x\right)\,\sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right)\sin\left(\frac{n\pi}{c}z\right)dzdydx$$

avec rappelons-le $\delta = \pi\sqrt{l^2a^{-2} + m^2b^{-2} + n^2c^{-2}}$.

Exemple:
Donner explicitement la solution du problème (Q) pour

$$a = b = c = 1, \qquad f(x,y,z) = xyz, \qquad g(x,y,z) = \frac{1}{2}.$$

b. $\boldsymbol{n = 2}$.
Considérons à présent l'équation des ondes dans un disque de $\mathbb{R}^2$.
Soit $D(0,1)$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1, déterminons la fonction u solution du problème

$$(\mathfrak{D})\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\Delta u \ \text{ dans } D(0,1);\ t > 0 \\ u(x,y,t) = 0 \ \text{ si } x^2+y^2 = 1;\ t \geq 0\ \ (CF) \\ \left.\begin{aligned} u(x,y,0) &= \tilde{f}(x,y) \ \text{ si } 0 \leq x^2+y^2 < 1 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) &= \tilde{g}(x,y) \ \text{ si } 0 \leq x^2+y^2 < 1 \end{aligned}\right\}(CI) \end{cases}$$

La géométrie du domaine nous impose l'utilisation des coordonnées polaires et le problème $(\mathfrak{D})$ s'écrira comme suit

$$(\mathfrak{D})\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(r,\theta,t) = c^2\Delta u(r,\theta,t) \text{ si } \ 0 \leq r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\ ;\ t > 0 \\ u(r,\theta,t) = 0 \ \text{ si } r = 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi;\ t \geq 0\ \ (CF) \\ \left.\begin{array}{l} u(r,\theta,0) = f(r,\theta) \ \text{ si } \ 0 \leq\ r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(r,\theta,0) = g(r,\theta) \ \text{ si } \ 0 \leq\ r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array}\right\}(CI) \end{cases}$$

Sachant l'expression en coordonnées polaires du laplacien, l'équation s'écrit

$$u_{tt} = c^2\left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}\right) \qquad \text{(I)}$$

En posant $u(r,\theta,t) = R(r)\Phi(\theta)T(t)$ et en remplaçant dans l'équation nous obtenons

$$\frac{T''}{c^2T} = \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi}\ ;$$

les variables étant indépendantes les deux membres sont nécessairement égaux à une constante réelle notée $-\eta$ et on a

$$\frac{T''}{c^2T} = -\eta = \frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + \frac{1}{r^2}\frac{\Phi''}{\Phi}$$

d'où

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} + \eta r^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi}$$

et donc il existe une autre constante μ telle que

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} + \eta r^2 = \mu = -\frac{\Phi''}{\Phi}.$$

Comme bilan nous obtenons les équations suivantes

$$\begin{cases} T'' + c^2\eta T = 0 & (1) \\ \Phi'' + \mu\Phi = 0 & (2) \\ r^2R'' + rR' + (\eta r^2 - \mu)R = 0 & (3) \end{cases}$$

Résolution de l'équation (2)

$$\begin{cases} \Phi'' + \mu\Phi = 0 \\ \Phi(0) = \Phi(2\pi). \end{cases}$$

Si $\mu < 0$ alors $\Phi \equiv 0$.

Si $\mu = 0$ alors Φ est identiquement constante.

Si $\mu > 0$ alors $\Phi(\theta) = A\cos(\theta\sqrt{\mu}) + B\sin(\theta\sqrt{\mu})$.

a_bensedik@mail.univ-tlemcen.dz

Déterminons les constantes A et B.

$$\left.\begin{array}{r}\Phi(0)=\Phi(2\pi)\\ \Phi'(0)=\Phi'(2\pi)\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} A\left(\cos\left(2\pi\sqrt{\mu}\right)-1\right)+B\sin\left(2\pi\sqrt{\mu}\right)=0\\ A\sin\left(2\pi\sqrt{\mu}\right)+B\left(1-\cos\left(2\pi\sqrt{\mu}\right)\right)=0.\end{cases}$$

C'est un système de Cramer, si son déterminant Det est non nul alors $A=B=0$ et Φ serait identiquement nulle. Prenons alors $Det=0$.

$$Det=0 \Longrightarrow 2\cos\left(2\pi\sqrt{\mu}\right)-2=0 \Longrightarrow 2\pi\sqrt{\mu}=2\pi n \Longrightarrow \mu=n^2, (n\in\mathbb{N}).$$

Nous obtenons ainsi une famille de solutions

$$\mu_n=n^2 \quad \text{et} \quad \Phi_{\mathrm{n}}(\theta)=A_n\cos(n\theta)+B_n\sin(n\theta), \qquad n\in\mathbb{N}.$$

Passons à la résolution de l'équation (3) pour $\mu=n^2$

$$\begin{cases} r^2R''+rR'+(\eta r^2-n^2)R=0\\ \quad R(1)=0, \quad R(0)\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Remarquons d'abord que si $\eta\leq 0$ alors la solution de l'équation (1) relative à T n'est pas bornée, prenons alors $\eta>0$ et posons $\eta=\lambda^2$, $\lambda>0$.
Nous avons donc l'équation

$$r^2R''+rR'+(\lambda^2r^2-n^2)R=0 \qquad \left(B_n^\lambda\right)$$

C'est l'équation de Bessel d'indice n.
Avant de résoudre $\left(B_n^\lambda\right)$ considérons l'équation

$$r^2Z''+rZ'+(r^2-n^2)Z=0 \qquad (B_n)$$

On montre, à titre d'exercice, la proposition (S) suivante

$$\left(Z(r)\ est\ solution\ de\ (B_n)\right) \Leftrightarrow \left(R(r)=Z(\lambda r)\ est\ solution\ de\ \left(B_n^\lambda\right)\right) \qquad (S)$$

Commençons par résoudre l'équation (B_n).
On utilise la méthode de Frobenius qui consiste à chercher Z sous la forme

$$Z(r)=r^\alpha\sum_{k\geq 0}a_kr^k$$

avec $a_0\neq 0$ et l'exposant α et les coefficients a_k sont à déterminer.

En dérivant et remplaçant dans l'équation (B_n) nous obtenons

$$\sum_{k\geq 0}\left((\alpha+k)(\alpha+k-1)+(\alpha+k)-n^2\right)a_k r^{\alpha+k}+\sum_{k\geq 0}a_k\,r^{\alpha+k+2}=0.$$

Par une translation d'indice dans la deuxième somme nous écrivons

$$\sum_{k\geq 0}((\alpha+k)^2-n^2)\,a_k r^{\alpha+k}+\sum_{k\geq 2}a_{k-2}\,r^{\alpha+k}=0$$

d'où

$$(\alpha^2-n^2)a_0r^\alpha+((\alpha+1)^2-n^2)a_1r^{\alpha+1}+\sum_{k\geq 2}[((\alpha+k)^2-n^2)a_k+a_{k-2}]\,r^{\alpha+k}=0,$$

et par suite

$$\begin{cases}(\alpha^2-n^2)a_0=0\\((\alpha+1)^2-n^2)a_1=0\\((\alpha+k)^2-n^2)a_k+a_{k-2}=0,\ \ k\geq 2.\end{cases}$$

Comme a_0 est non nul nous déduisons que $\alpha=\pm n$.
La deuxième équation donne $a_1=0$ car $(\alpha+1)^2-n^2\neq 0$ puisque $\alpha=\pm n$.
Prenons $\alpha=n$, alors de la troisième équation nous obtenons la relation de récurrence

$$a_k=-\frac{a_{k-2}}{k(k+2n)}\,,k\geq 2.$$

Ainsi puisque $a_1=0$ alors tous les coefficients d'indices impairs sont nuls i.e.

$$a_{2m+1}=0,\qquad m\in\mathbb{N}.$$

Pour les coefficients d'indices pairs nous pouvons vérifier que

$$a_{2m}=(-1)^m\frac{a_0}{2^{2m}m!\,(n+1)(n+2)\ldots(n+m)}\ \ ,\ \ m\in\mathbb{N}^*$$

et que nous pouvons les mettre sous la forme compacte

$$a_{2m}=\frac{(-1)^m}{2^{2m}}\frac{n!\,a_0}{m!\,(n+m)!}\ \ ,\ \ m\in\mathbb{N}^*.$$

La solution cherchée s'écrit donc pour $\alpha=n$ en prenant $a_0=1$

$$Z_n(r)=r^n\sum_{m\geq 0}\frac{(-1)^m}{2^{2m}}\frac{n!}{m!\,(n+m)!}r^{2m}=\sum_{m\geq 0}\frac{(-1)^m}{2^{2m}}\frac{n!}{m!\,(n+m)!}r^{n+2m},$$

c'est fonction de Bessel de première espèce d'indice $n \in \mathbb{N}$ que l'on note J_n

$$J_n(x) = \sum_{m\geq 0} \frac{(-1)^m}{2^{2m}} \frac{n!}{m!\,(n+m)!} x^{n+2m}.$$

La fonction de Bessel d'indice $-n, n \in \mathbb{N}$ est la fonction

$$J_{-n}(x) = \sum_{m\geq 0} \frac{(-1)^m}{2^{2m}} \frac{n!}{m!\,(-n+1)(-n+2)\ldots(-n+m)} x^{-n+2m} = (-1)^n J_n(x).$$

Retournons à l'équation (B_n). Cette équation est du deuxième ordre et admet pour solutions $J_n(r)$ et $J_{-n}(r)$ mais ces deux solutions ne sont pas linéairement indépendantes puisque $J_{-n} = (-1)^n J_n$. La deuxième solution indépendante de J_n est la fonction de Neumann N_n définie par

$$N_n(r) = \lim_{p\to n} \frac{J_n(r)\cos(p\pi) - J_{-n}(r)}{\sin(p\pi)}.$$

En conclusion, la solution générale de l'équation (B_n) est:

$$Z(r) = CJ_n(r) + DN_n(r); \quad C, D \in \mathbb{R}.$$

Et par conséquent, d'après la proposition (S), la solution de l'équation $\left(B_n^\lambda\right)$ d'inconnue R est

$$R(r) = Z(\lambda r) = CJ_n(\lambda r) + DN_n(\lambda r).$$

Les conditions sur R nous donnent

$$R(0) \in \mathbb{R} \Longrightarrow R(0) \text{ fini} \Longrightarrow D = 0, \qquad \text{car } \lim_{r\to 0} N_n(r) = -\infty.$$

et

$$R(1) = 0 \Longrightarrow CJ_n(\lambda) = 0 \Longrightarrow (C = 0 \text{ ou } J_n(\lambda) = 0),$$

écartons l'éventualité $C = 0$, alors $J_n(\lambda) = 0$ et par suite λ est un zéro de la fonction J_n.

Or la fonction de Bessel J_n admet une infinité dénombrable de zéros,

$$0 < \gamma_{n1} < \gamma_{n2} < \cdots < \gamma_{nk} < \cdots$$

A noter que $J_0(0) > 0$ et $J_n(0) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

La famille de solutions de l'équation en R est donc

$$R_{nk}(r) = J_n(\gamma_{nk} r)$$

avec $J_n(\gamma_{nk}) = 0$.

On termine par la résolution de l'équation (1) en T pour $\eta = \lambda^2 = (\gamma_{nk})^2 = \gamma_{nk}^2$:

$$T'' + c^2 \gamma_{nk}^2 T = 0.$$

Cette équation a pour solutions la famille suivante

$$T_{nk}(t) = C_{nk} \cos(c\gamma_{nk} t) + D_{nk} \sin(c\gamma_{nk} t).$$

Finalement, l'équation de départ (I) admet pour solutions

$$u_{nk}(r,\theta,t) = R_{nk}(r)\Phi_{\mathrm{n}}(\theta)T_{nk}(t)$$

$$u_{nk}(r,\theta,t) = J_n(\gamma_{nk} r)[A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)][C_{nk} \cos(c\gamma_{nk} t) + D_{nk} \sin(c\gamma_{nk} t)]$$

et par le principe de superposition nous obtenons

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=0,k=1}^{+\infty} J_n(\gamma_{nk} r)[A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)][C_{nk} \cos(c\gamma_{nk} t) + D_{nk} \sin(c\gamma_{nk} t)].$$

Déterminons maintenant les différents coefficients. En utilisant les conditions initiales (CI) nous obtenons

$$u(r,\theta,0) = f(r,\theta) \Longrightarrow f(r,\theta) = \sum_{n=0,k=1}^{+\infty} J_n(\gamma_{nk} r)[A_{nk} \cos(n\theta) + B_{nk} \sin(n\theta)]$$

$$u_t(r,\theta,0) = g(r,\theta) \Longrightarrow g(r,\theta) = \sum_{n=0,k=1}^{+\infty} c\gamma_{nk} J_n(\gamma_{nk} r)[E_{nk} \cos(n\theta) + F_{nk} \sin(n\theta)]$$

où l'on a posé $A_{nk} = A_n C_{nk}$, $B_{nk} = B_n C_{nk}$, $E_{nk} = A_n D_{nk}$ et $F_{nk} = B_n D_{nk}$.

Ainsi

$$(\mathcal{F}) \begin{cases} f(r,\theta) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} K_n(r) \cos(n\theta) + L_n(r) \sin(n\theta) \\ c^{-1} g(r,\theta) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} M_n(r) \cos(n\theta) + P_n(r) \sin(n\theta) \end{cases}$$

où les nouveaux coefficients sont définis par,

$$(\mathcal{B})\begin{cases} K_n(r) = \sum_{k\geq 1} A_{nk}\, J_n(\gamma_{nk}r) & L_n(r) = \sum_{k\geq 1} B_{nk}\, J_n(\gamma_{nk}r) \\ M_n(r) = \sum_{k\geq 1} \gamma_{nk}E_{nk}\, J_n(\gamma_{nk}r) & P_n(r) = \sum_{k\geq 1} \gamma_{nk}F_{nk}\, J_n(\gamma_{nk}r). \end{cases}$$

D'une part, connaissant les coefficients de Fourier, à partir de $(\mathcal{F})$ nous avons

$$K_n(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\alpha)\cos(n\alpha)\, d\alpha, \qquad L_n(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\alpha)\sin(n\alpha)\, d\alpha, n\geq 1$$

$$K_0(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\alpha)\, d\alpha, \quad M_0(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} c^{-1}g(r,\theta)\, d\alpha$$

$$M_n(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} c^{-1}g(r,\theta)\cos(n\alpha)\, d\alpha, \qquad P_n(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} c^{-1}g(r,\theta)\sin(n\alpha)\, d\alpha, n\geq 1;$$

d'autre part de $(\mathcal{B})$ nous avons les développements suivant les fonctions de Bessel d'où

$$\begin{aligned} A_{nk} &= \frac{2}{\pi J_{n+1}^2(\gamma_{nk})}\int_0^1 r\, K_n(r) J_n(\gamma_{nk}r)dr \\ &= \frac{2}{\pi J_{n+1}^2(\gamma_{nk})}\int_0^1\int_0^{2\pi} rJ_n(\gamma_{nk}r)f(r,\alpha)\cos(n\alpha)d\alpha\, dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_{nk} &= \frac{2}{\pi J_{n+1}^2(\gamma_{nk})}\int_0^1 r\, L_n(r) J_n(\gamma_{nk}r)dr \\ &= \frac{2}{\pi J_{n+1}^2(\gamma_{nk})}\int_0^1\int_0^{2\pi} rJ_n(\gamma_{nk}r)f(r,\alpha)\sin(n\alpha)d\alpha\, dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{nk}E_{nk} &= \frac{2}{\pi J_{n+1}^2(\gamma_{nk})}\int_0^1 r\, M_n(r) J_n(\gamma_{nk}r)dr \\ &= \frac{2c^{-1}}{\pi J_{n+1}^2(\gamma_{nk})}\int_0^1\int_0^{2\pi} rJ_n(\gamma_{nk}r)g(r,\alpha)\cos(n\alpha)d\alpha\, dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{nk}F_{nk} &= \frac{2}{\pi J_{n+1}^2(\gamma_{nk})}\int_0^1 r\, P_n(r) J_n(\gamma_{nk}r)dr \\ &= \frac{2c^{-1}}{\pi J_{n+1}^2(\gamma_{nk})}\int_0^1\int_0^{2\pi} rJ_n(\gamma_{nk}r)g(r,\alpha)\sin(n\alpha)d\alpha\, dr,\ n\geq 1 \end{aligned}$$

et

$$A_{0k} = \frac{2}{\pi J_1^2(\gamma_{0k})}\int_0^1 r\, K_0(r)J_0(\gamma_{0k}r)dr = \frac{1}{\pi J_1^2(\gamma_{0k})}\int_0^1\int_0^{2\pi} rJ_0(\gamma_{0k}r)f(r,\alpha)\, d\alpha dr$$

$$\gamma_{0k}E_{0k} = \frac{2}{\pi J_1^2(\gamma_{0k})}\int_0^1 r\, M_0(r)J_0(\gamma_{0k}r)dr = \frac{c^{-1}}{\pi J_1^2(\gamma_{0k})}\int_0^1\int_0^{2\pi} rJ_0(\gamma_{0k}r)g(r,\alpha)\, d\alpha dr.$$

Application: Retrouvez la solution du problème $(\mathfrak{D})$ pour $f(r,\theta) = 1$ et $g(r,\theta) = 0$.

Exercice: Démontrer la proposition (S).

Devoir: Faites une recherche sur les fonctions de Bessel d'indice réel quelconque et établissez leurs premières propriétés. Étudiez brièvement les développements en série de Fourier-Bessel.

4. Retour sur la formule de D'Alembert

Nous avons établi dans le point 2, la formule de D'Alembert pour x parcourant la droite réelle tout entière. Quelle est alors l'expression de la solution pour x appartenant à la demi-droite positive ?

Considérons le problème

$$(\mathcal{P}_+)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2};\ t > 0, \qquad 0 < x < +\infty \\ u(x,0) = f(x), \qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x);\ \ x > 0 \quad (CI) \\ u(0,t) = 0;\ \ t > 0 \qquad (CB) \end{cases}$$

où f et g sont deux fonctions continues telles que $f(0) = g(0) = 0$.

Transformons le problème $(\mathcal{P}_+)$ par une réflexion impaire (symétrie de centre l'origine) afin pouvoir appliquer la formule de D'Alembert.

Posons pour cet effet

$${}^0u(x,t) = \begin{cases} u(x,t); x \geq 0, t \geq 0 \\ -u(-x,t); x \leq 0, t \geq 0 \end{cases}$$

$${}^0f(x) = \begin{cases} f(x);\ x \geq 0 \\ -f(-x);\ x \leq 0 \end{cases}$$

$${}^0g(x) = \begin{cases} g(x);\ x \geq 0 \\ -g(-x);\ x \leq 0 \end{cases}$$

Ces trois fonctions sont impaires par rapport à $x \in \mathbb{R}$.

En effet, si $x \geq 0$; ${}^0u(x,t) + {}^0u(-x,t) = u(x,t) - u(-(-x),t) = u(x,t) - u(x,t) = 0$
et si $x \leq 0$; ${}^0u(x,t) + {}^0u(-x,t) = -u(-x,t) + u(-x,t) = 0$.
Pour la fonction ${}^0f$:
si $x \geq 0$; ${}^0f(x) + {}^0f(-x) = f(x) - f\big(-(-x)\big) = f(x) - f(x) = 0$
si $x \leq 0$; ${}^0f(x) + {}^0f(-x) = -f(-x) + f(-x) = 0$.
De même pour la fonction ${}^0g$.

Avec ces nouvelles fonctions le problème $(\mathcal{P}_+)$ devient

$$\begin{cases} {}^0u_{tt}(x,t) = c^2\ {}^0u_{xx}(x,t); & t>0, \quad -\infty < x < +\infty \\ {}^0u(x,0) = {}^0f(x), \quad {}^0u_t(x,0) = {}^0g(x); & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

et la formule de D'Alembert nous donne, puisque x parcourt $\mathbb{R}$,

$${}^0u(x,t) = \frac{1}{2}\left({}^0f(x+ct) + {}^0f(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} {}^0g(y)dy.$$

Maintenant en utilisant les définitions des fonctions ${}^0u$, ${}^0f$ et ${}^0g$, nous obtenons l'expression de $u(x,t)$ pour $x \in [0,+\infty[$:

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\big(f(x+ct)+f(x-ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy, & \text{si } x \geq ct \geq 0 \\ \frac{1}{2}\big(f(x+ct)-f(-x+ct)\big) + \frac{1}{2c}\int_{-x+ct}^{x+ct} g(y)dy, & \text{si } 0 \leq x \leq ct. \end{cases}$$

Exercice 1: Analyser l'étude précédente pour $f(0) \neq 0$ ou $g(0) \neq 0$.

Exercice 2:

a. Peut-on avoir une formule analogue à celle de D'Alembert pour $x \in [a,b]$.

b. Résoudre par la méthode de séparation des variables le problème

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0; 0 < x < \pi, & t > 0 \\ u(x,0) = 1, \ u_t(x,0) = 0; \ 0 < x < \pi \\ u(0,t) = 0, \ u(\pi,t) = 0; \ t \geq 0. \end{cases}$$

5. Équation d'ondes non homogène – Principe de Duhamel

a. Soit l'équation des ondes non homogène suivante

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x,t); \quad x \in \mathbb{R}, \qquad t > 0. \qquad (NH)$$

Comme l'équation est linéaire, si on connaît une solution particulière u_p de cette équation c.à.d. vérifiant (NH) alors sa solution générale s'écrira sous la forme

$$u(x,t) = u_p(x,t) + \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$$

où $\varphi, \psi \in C^2(\mathbb{R})$.

Considérons à présent le problème formé de l'équation (NH) et des conditions initiales homogènes

$$(\mathcal{P}_{NH}) \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x,t); & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0; & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Nous allons montrer que la solution de ce problème s'exprime en fonction de la solution $U(x,t,s)$ du problème suivant

$$(\mathcal{D}_H)\begin{cases} U_{tt}-c^2U_{xx}=0; \;\; x\in\mathbb{R}, t>0 \\ \;\; U(x,0,s)=0; \;\;\; x\in\mathbb{R} \\ \;\; U_t(x,0,s)=h(x,s); \; x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

où s est paramètre réel positif.

La solution du problème $(\mathcal{D}_H)$ est donnée par la formule de D'Alembert

$$U(x,t,s)=\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}h(y,s)dy \qquad (*)$$

Théorème (Principe de Duhamel): *Si $U(x,t,s)$ est une fonction de classe C^2 en x et t, de classe C^0 en s et résout le problème $(\mathcal{D}_H)$, alors*

$$u(x,t)=\int_0^t U(x,t-s,s)ds \qquad (**)$$

est solution du problème $(\mathcal{P}_{NH})$.

Preuve: En dérivant les deux membres de $(**)$ par rapport à t, nous obtenons

$$u_t(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t U(x,t-s,s)ds=U(x,0,t)+\int_0^t U_t(x,t-s,s)ds=\int_0^t U_t(x,t-s,s)ds,$$

car $U(x,0,t)=0$.

Par dérivation une deuxième fois par rapport à t nous aurons

$$u_{tt}(x,t)=U_t(x,0,t)+\int_0^t U_{tt}(x,t-s,s)ds=h(x,s)+\int_0^t U_{tt}(x,t-s,s)ds.$$

Maintenant la dérivation de $u(x,t)$ par rapport à x nous donne

$$u_{xx}(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^t U(x,t-s,s)ds=\int_0^t U_{xx}(x,t-s,s)ds.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} u_{tt}-c^2u_{xx}&=h(x,s)+\int_0^t U_{tt}(x,t-s,s)ds-c^2\int_0^t U_{xx}(x,t-s,s)ds \\ &=h(x,s)+\int_0^t (U_{tt}-c^2U_{xx})(x,t-s,s)ds, \end{aligned}$$

et sachant que U est solution de $(\mathcal{D}_H)$ alors $U_{tt}-c^2U_{xx}=0$ et par suite

$$u_{tt}-c^2u_{xx}=h(x,s).$$

En outre u satisfait les conditions initiales,

$$u(x,0)=\int_0^0 U(x,t-s,s)ds=0, \qquad u_t(x,0)=\int_0^0 U_t(x,t-s,s)ds=0.$$

En conclusion la fonction u définie par $(**)$ est bien solution du problème $(\mathcal{P}_{NH})$ et nous avons en utilisant $(*)$

$$u(x,t)=\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} h(y,s)dy\,ds.$$

Notons pour finir que si $h(x,t)$ est de classe C^1 en x et de classe C^0 en t alors $u(x,t)$ donnée par la dernière formule fournit une solution de classe C^2 de $(\mathcal{P}_{NH})$.

b. Soit maintenant le problème non homogène avec conditions initiales non homogènes

$$(\mathcal{P}_{NN})\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=h(x,t); \quad x\in\mathbb{R}, \qquad t>0 \\ u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=g(x); \quad x\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

A cause de la linéarité ce problème peut-être partagé en deux problèmes

$$(\mathcal{P})\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0; \quad x\in\mathbb{R}, \qquad t>0 \\ u(x,0)=f(x),\ u_t(x,0)=g(x); \quad x\in\mathbb{R},\end{cases}$$

$$(\mathcal{P}_{NH})\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=h(x,t); \quad x\in\mathbb{R}, \qquad t>0 \\ u(x,0)=\ u_t(x,0)=0; \quad x\in\mathbb{R},\end{cases}$$

et la solution de $(\mathcal{P}_{NN})$ est la somme de la solution de $(\mathcal{P})$ et celle de $(\mathcal{P}_{NH})$.
Ainsi la solution du problème $(\mathcal{P}_{NN})$ est

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\big(f(x+ct)+f(x-ct)\big)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(y)dy+\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} h(y,s)dy\,ds.$$

Application: Résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt}-u_{xx}=x+t; \quad x\in\mathbb{R}, \qquad t>0 \\ u(x,0)=x^2,\ u_t(x,0)=\cos x\,; \quad x\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

6. Équation des ondes en dimensions supérieures

a. Considérons dans cette partie l'équation des ondes en dimension $n \geq 2$,

$$u_{tt} = c^2 \Delta u; \;\; x \in \mathbb{R}^n, t > 0$$

avec les conditions initiales

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x); \;\; x \in \mathbb{R}^n.$$

Nous allons transformer, en utilisant les moyennes sphériques, l'équation précédente donnée en dimension $n \geq 2$ en une équation en dimension 1.
Commençons par la définition suivante.

Définition: *Pour une fonction h continue sur $\mathbb{R}^n$, on définit sa moyenne sphérique sur la sphère de rayon r et de centre x par*

$$M_h(x,r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B(0,1)} h(x+rz)\, dS(z) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|z|=1} h(x+rz)\, dS(z),$$

où ω_n est l'aire de la sphère unité $\partial B(0,1) = \boldsymbol{S}^{n-1} = \{z \in \mathbb{R}^n;\ |z| = 1\}$.

La fonction M_h vérifie des propriétés importantes groupées dans la proposition suivante.

Proposition: *Pour une fonction donnée $h = h(x) \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $k \geq 2$, la fonction $v: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $v(x,r) = M_h(x,r)$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.*

De plus elle vérifie les propriétés suivantes:

1. $v(x,0) = h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

2. $v(x,-r) = v(x,r)$ pour tous $x \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}$.

3. $\frac{\partial}{\partial r} v(x,0) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

4. $\frac{\partial^2}{\partial r^2} v(x,r) + \frac{n-1}{r} \frac{\partial}{\partial r} v(x,r) = \Delta_x v(x,r)$ dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^*$.

Preuve:

Remarquons d'abord que nous avons généralisé la définition de la moyenne sphérique aux valeurs négatives de r, ainsi pour $r \in \mathbb{R}$ nous dirons que $M_h(x,r)$ est la moyenne sphérique de la fonction h sur la sphère de centre x et de rayon $|r|$.
On a

$$v(x,r) = M_h(x,r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|z|=1} h(x+rz)\, dS(z) \qquad (1)$$

comme $h \in C^k(\mathbb{R}^n)$ alors on peut dériver successivement sous le signe intégrale et conclure que $v \in C^k(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$.

Pour le point 1 nous avons

$$v(x,0)=\frac{1}{\omega_n}\int_{|z|=1}h(x)\,dS(z)=\frac{h(x)}{\omega_n}\int_{|z|=1}dS(z)=\frac{h(x)}{\omega_n}\omega_n=h(x).$$

Vérifions le deuxième point.

$$v(x,-r)=\frac{1}{\omega_n}\int_{|z|=1}h(x-rz)\,dS(z)=\frac{1}{\omega_n}\int_{|y|=1}h(x+ry)\,dS(y)=v(x,r).$$

Concernant le point 3, nous avons

$$\frac{\partial}{\partial r}v(x,r)=\frac{1}{\omega_n}\int_{|z|=1}\frac{\partial}{\partial r}h(x+rz)\,dS(z)=\frac{1}{\omega_n}\int_{|z|=1}\nabla h(x+rz).z\,dS(z)$$

d'où

$$v_r(x,0)=\frac{1}{\omega_n}\int_{|z|=1}\nabla h(x).z\,dS(z).$$

D'autre part

$$\frac{\partial}{\partial r}v(x,-r)=\frac{1}{\omega_n}\int_{|z|=1}\frac{\partial}{\partial r}h(x-rz)\,dS(z)=-\frac{1}{\omega_n}\int_{|z|=1}\nabla h(x-rz).z\,dS(z)$$

et donc

$$v_r(x,-0)=-\frac{1}{\omega_n}\int_{|z|=1}\nabla h(x).z\,dS(z).$$

Ainsi

$$v_r(x,0)=-v_r(x,0)$$

et par suite $v_r(x,0)=0$.

Passons au quatrième point.
Dérivons par rapport à r les deux membres de (1), nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial r}v(x,r)=\frac{1}{\omega_n}\int_{|z|=1}\nabla h(x+rz).z\,dS(z) \qquad (2)$$

Transformons le second membre en utilisant le théorème de la divergence dans le domaine $\Omega=\{z\in\mathbb{R}^n;\ |z|<1\}$ de frontière $\partial\Omega=\partial B(0,1)=\boldsymbol{S}^{n-1}$ et dont la normale unitaire extérieure est $\eta(z)=z$.

a_bensedik@mail.univ-tlemcen.dz

Remarquons que l'intégrant dans l'intégrale dans (2) n'est autre que $W.\eta$ où

$$W(z) = \nabla_x h(x + rz).$$

D'après le théorème de la divergence nous avons

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} W(z) dz = \int_{\partial\Omega} W(z).\eta(z) dS(z) \qquad (3)$$

et comme

$$\operatorname{div} W(z) = \operatorname{div}\left(\nabla_x h(x + rz)\right) = r \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} h(x + rz) = r\Delta_x h(x + rz),$$

nous obtenons en remplaçant dans (3)

$$\int_{\Omega} r\Delta_x h(x + rz) dz = \int_{\partial\Omega} \nabla_x h(x + rz). z dS(z)$$

i.e.

$$\int_{|z|=1} \nabla_x h(x + rz). z dS(z) = \int_{|z|<1} r\Delta_x h(x + rz) dz.$$

De (2) nous déduisons que

$$\frac{\partial}{\partial r} v(x,r) = \frac{r}{\omega_n} \int_{|z|<1} \Delta_x h(x + rz) dz = \frac{r}{\omega_n} \Delta_x \left(\int_{|z|<1} h(x + rz) dz \right) \qquad (4)$$

Posons maintenant $y = rz$, d'où $dy = r^n dz$ et par suite

$$\int_{|z|<1} h(x + rz) dz = \frac{1}{r^n} \int_{|y|<r} h(x + y) dy.$$

Or

$$\int_{|y|<r} h(x + y) dy = \int_0^r \int_{|\vartheta|=\rho} h(x + \vartheta) dS(\vartheta)\, d\rho = \int_0^r \int_{|\upsilon|=1} \rho^{n-1} h(x + \rho\upsilon) dS(\upsilon)\, d\rho$$
$$= \omega_n \int_0^r \rho^{n-1}\, v(x,\rho\,) d\rho.$$

Ainsi

$$\int_{|z|<1} h(x + rz) dz = \frac{\omega_n}{r^n} \int_0^r \rho^{n-1}\, v(x,\rho\,) d\rho,$$

en portant dans (4)nous écrivons

$$\frac{\partial}{\partial r} v(x,r) = \frac{r}{\omega_n} \Delta_x \left(\frac{\omega_n}{r^n} \int_0^r \rho^{n-1}\, v(x,\rho\,) d\rho \right) = \frac{1}{r^{n-1}} \int_0^r \rho^{n-1} \Delta_x\, v(x,\rho\,) d\rho.$$

Multiplions par r^{n-1} et dérivons par rapport *à* r

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}v(x,r)\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\int_0^r \rho^{n-1}\,\Delta_x v(x,\rho\,)d\rho\right),$$

ce qui donne

$$r^{n-1}\frac{\partial^2}{\partial r^2}v(x,r)+(n-1)r^{n-2}\frac{\partial}{\partial r}v(x,r)=r^{n-1}\Delta_x v(x,r\,).$$

En simplifiant par $r^{n-1}\neq 0$ nous arrivons à la relation voulue

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}v(x,r)+\frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}v(x,r)=\Delta_x v(x,r\,).$$

C'est la formule de *Darboux*.■

b. Application: Diminution de la dimension

Considérons le problème suivant

$$u_{tt}=c^2\Delta u;\quad x\in\mathbb{R}^n, t>0 \qquad (\mathcal{E})$$

avec les conditions initiales

$$u(x,0)=f(x),\quad u_t(x,0)=g(x);\ \ x\in\mathbb{R}^n. \quad (\mathcal{CI})$$

Soit $u(x,t)$ une solution de $(\mathcal{E})$. Regardons t comme paramètre et considérons la moyenne sphérique de $u(x,t)$,

$$v(x,r,t)=M_u(x,r,t)=\frac{1}{\omega_n}\int_{|z|=1}u(x+rz,t)\,dS(z).$$

Dérivons deux fois par rapport à t

$$v_{tt}(x,r,t)=\frac{1}{\omega_n}\int_{|z|=1}u_{tt}(x+rz,t)\,dS(z).$$

et d'après $(\mathcal{E})$

$$v_{tt}(x,r,t)=\frac{c^2}{\omega_n}\int_{|z|=1}\Delta u(x+rz,t)\,dS(z)=c^2\Delta\left(\frac{1}{\omega_n}\int_{|z|=1}u(x+rz,t)\,dS(z)\right)$$

d'où

$$v_{tt}(x,r,t)=c^2\Delta v(x,r,t).$$

En utilisant la formule de Darboux, nous obtenons

$$v_{tt}(x,r,t) = c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}v(x,r,t) + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}v(x,r,t)\right)$$

c.-à-d.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}M_u(x,r,t) = c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}M_u(x,r,t) + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}M_u(x,r,t)\right)$$

C'est l'équation d'*Euler-Poisson-Darboux*.

Concernant les conditions initiales

$$M_u(x,r,0) = \frac{1}{\omega_n}\int_{|z|=1} u(x+rz,0)\,dS(z) = \frac{1}{\omega_n}\int_{|z|=1} f(x+rz)\,dS(z)$$

donc

$$M_u(x,r,0) = M_f(x,r),$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t}M_u(x,r,0) = \frac{1}{\omega_n}\int_{|z|=1} u_t(x+rz,0)\,dS(z) = \frac{1}{\omega_n}\int_{|z|=1} g(x+rz)\,dS(z)$$

ainsi

$$\frac{\partial}{\partial t}M_u(x,r,0) = M_g(x,r).$$

Avec les notations suivantes:

$$M_u(x,r,t) = U(x,r,t), \qquad M_f(x,r) = F(x,r), \qquad M_g(x,r) = G(x,r),$$

le problème initial $(\mathcal{E})(\mathcal{CJ})$ est transformé au problème suivant d'inconnue U

$$(\mathcal{ER})\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}U(x,r,t) = c^2\left(\dfrac{\partial^2}{\partial r^2}U(x,r,t) + \dfrac{n-1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}U(x,r,t)\right); & r \in \mathbb{R},\ \ t > 0 \\ U(x,r,0) = F(x,r), \qquad \dfrac{\partial}{\partial t}U(x,r,0) = G(x,r); & r \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Puisque les dérivées portent sur les variables r et t alors le problème $(\mathcal{ER})$ est donné dans l'ensemble $\mathcal{A} = \{(r,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+\}$ et x représente un paramètre.
C'est un problème en dimension 1, puisque r est un réel !
Nous disons que l'équation dans le problème $(\mathcal{ER})$ est l'équation des ondes avec terme d'ordre inférieur

$$U_r(x,r,t) = \frac{\partial}{\partial r}U(x,r,t).$$

Si maintenant $U(x,r,t)$ est solution de $(\mathcal{ER})$, alors la solution $u(x,t)$ du problème de départ $(\mathcal{E})(\mathcal{CI})$ peut-être obtenue en remarquant tout simplement que

$$u(x,t) = \lim_{r\to 0} U(x,r,t).$$

En effet, comme nous l'avons déjà vu,

$$\lim_{r\to 0} U(x,r,t) = \lim_{r\to 0} M_u(x,r,t) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{\omega_n}\int_{|z|=1} u(x+rz,t)\, dS(z) = \frac{1}{\omega_n}\int_{|z|=1} u(x,t)\, dS(z)$$
$$= \frac{u(x,t)}{\omega_n}\int_{|z|=1} dS(z)$$

donc

$$\lim_{r\to 0} M_u(x,r,t) = \frac{u(x,t)}{\omega_n}\omega_n = u(x,t).$$

7. Formules de Kirchhoff et de Poisson

Soit le problème

$$(\mathcal{P}_n)\begin{cases} u_{tt} = c^2\Delta u;\ \ x\in\mathbb{R}^n, t>0 \\ u(x,0) = f(x),\ \ u_t(x,0) = g(x);\ \ x\in\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

a. Formule de Kirchhoff:

Nous allons résoudre le problème $(\mathcal{P}_n)$ pour $n = 3$, en d'autres termes nous allons déterminer la forme de la solution du problème $(\mathcal{P}_3)$.

En utilisant les moyennes sphériques, on démontre le théorème suivant.

Théorème (Formule de Kirchhoff): *Soient $f \in C^3(\mathbb{R}^3)$ et $g \in C^2(\mathbb{R}^3)$. Alors le problème $(\mathcal{P}_3)$ admet une unique solution $u(x,t)$ définie par la formule de Kirchhoff,*

$$u(x,t) = tG(x,ct) + \frac{\partial}{\partial t}\big(tF(x,ct)\big)$$
$$= \frac{1}{4\pi c^2t^2}\int_{|y-x|=ct} [tg(y) + f(y) + \nabla f(y).(y-x)]dS(y),$$

où $F(x,r)$ et $G(x,r)$ sont les moyennes sphériques de f et g respectivement.

Preuve:

D'après la formule de Darboux, puisque $G(x,r)$ est la moyenne sphérique de $g(x)$ alors pour $n = 3$ nous avons

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}G(x,r) + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}G(x,r) = \Delta_x G(x,r),\ \ (x,r) \in \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^*.$$

Multiplions les deux membres par r nous obtenons

$$rG_{rr}(x,r)+2G_r(x,r)=\Delta_x\big(rG(x,r\,)\big)$$

Écrivons cette équation sous la forme

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\big(rG(x,r)\big)=\Delta_x\big(rG(x,r\,)\big),$$

et posons

$$\overline{G}(x,t):=tG(x,ct\,)=\frac{t}{4\pi}\int_{|z|=1} g\,(x+ctz)dS(z).$$

alors la fonction $\overline{G}$ satisfait l'équation des ondes

$$\overline{G}_{tt}(x,t)=c^2\Delta\overline{G}(x,t);\ x\in\mathbb{R}^3,t>0$$

avec les conditions initiales

$$\overline{G}(x,0)=0,\ \ \overline{G}_t(x,0)=g(x);\ \ x\in\mathbb{R}^3.$$

En reprenant les mêmes calculs pour la moyenne sphérique $F(x,r)$ de $f(x)$ et en posant

$$\overline{F}(x,t):=tF(x,ct\,)=\frac{t}{4\pi}\int_{|z|=1} g\,(x+ctz)dS(z)$$

nous vérifions sans difficulté que

$$\overline{F}_{tt}(x,t)=c^2\Delta\overline{F}(x,t);\ x\in\mathbb{R}^3,t>0.$$

On montre à titre d'exercice que puisque $\overline{\mathrm{F}}$ est de classe C^3sur $\mathbb{R}^3\times\,]0,+\infty[$ et vérifie l'équation des ondes alors la fonction $\overline{\mathrm{F}}_t$ vérifie également cette équation.
De plus nous avons

$$\overline{\mathrm{F}}_t(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\overline{F}(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\big(tF(x,ct\,)\big)=F(x,ct\,)+t\frac{\partial}{\partial t}F(x,ct\,)$$

$$\overline{\mathrm{F}}_t(x,t)=\frac{1}{4\pi}\int_{|z|=1} f\,(x+ctz)dS(z)+\frac{t}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{|z|=1} f\,(x+ctz)dS(z)\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_{|z|=1} f\,(x+ctz)dS(z)+\frac{t}{4\pi}c\int_{|z|=1}\nabla f\,(x+ctz).\,zdS(z).$$

D'où

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{F}(x,t)=\frac{1}{4\pi}\int_{|z|=1}[f(x+ctz)+ct\nabla f(x+ctz).\,z]dS(z).$$

Et on a

$$\overline{\mathrm{F}}_t(x,0)=\frac{1}{4\pi}\int_{|z|=1} f\,(x)dS(z)=\frac{f(x)}{4\pi}4\pi=f(x),$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\mathrm{F}}_t(x,0)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\overline{F}(x,0)=c^2\Delta\overline{F}(x,0)=0.$$

Nous avons obtenu ainsi deux solutions de l'équation du problème $(\mathcal{P}_3)$,
La première c'est $\overline{G}(x,t)$ vérifiant

$$\overline{G}(x,0)=0,\ \ \overline{G}_t(x,0)=g(x);\ \ x\in\mathbb{R}^3$$

et la deuxième solution est $\overline{\mathrm{F}}_t(x,t)$ avec

$$\overline{\mathrm{F}}_t(x,0)=f(x),\qquad \overline{\mathrm{F}}_{tt}(x,0)=\frac{\partial}{\partial t}\overline{\mathrm{F}}_t(x,0)=0,\qquad x\in\mathbb{R}^3.$$

Maintenant puisque le problème $(\mathcal{P}_3)$ est linéaire alors sa solution s'écrit comme suit

$$u(x,t)=\overline{\mathrm{F}}_t(x,t)+\overline{G}(x,t),$$

et remarquons que nous avons bien pour tout $x\in\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} u(x,0)=\overline{\mathrm{F}}_t(x,0)+\overline{G}(x,0)=f(x)\\ u_t(x,0)=\overline{\mathrm{F}}_{tt}(x,0)+\overline{G}_t(x,0)=g(x).\end{cases}$$

Exprimons pour finir $u(x,t)$ en fonction de $f(x)$ et $g(x)$. Nous avons

$$u(x,t)=\overline{\mathrm{F}}_t(x,t)+\overline{G}(x,t)$$

En remplaçant chaque terme par son expression nous obtenons

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi}\int_{|z|=1}[f(x+ctz)+ct\nabla f(x+ctz).z]dS(z)+\frac{t}{4\pi}\int_{|z|=1} g\,(x+ctz)dS(z),$$

Posons $y=x+ctz$, alors $dS(y)=c^2t^2dS(z)$ et $|z|=1\Longrightarrow|y-x|=ct.$
Avec ce changement

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi c^2t^2}\int_{|y-x|=ct}[f(y)+\nabla f(y).(y-x)]dS(y)+\frac{t}{4\pi c^2t^2}\int_{|y-x|=ct} g\,(y)dS(y)$$

et nous aboutissons la formule de Kirchhoff

$$u(x,t)=\frac{1}{4\pi c^2t^2}\int_{|y-x|=ct}[tg(y)+f(y)+\nabla f(y).(y-x)]dS(y).$$

■

Exercice: Justifier l'unicité de la solution confirmée par le théorème.
Exercice: Montrer que si $v(x,t) \in C^3(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+)$ est solution de l'équation des ondes alors $v_t(x,t)$ est également solution de l'équation des ondes.

a. Formule de Poisson:
Considérons à présent le problème $(\mathcal{P}_n)$ pour $n = 2$.
Nous allons déduire la solution du problème $(\mathcal{P}_2)$ en se servant de celle du problème $(\mathcal{P}_3)$. La méthode qui permet de faire ce passage s'appelle *la méthode de descente d'Hadamard*.

Théorème (Formule de Poisson): *Soient $f \in C^3(\mathbb{R}^2)$ et $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Alors le problème $(\mathcal{P}_2)$ admet une unique solution $u(x,t)$ définie par la formule de Poisson,*

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi ct}\int_{|y-x|<ct} \frac{tg(y) + f(y) + \nabla f(y).(y-x)}{\sqrt{c^2t^2 - |y-x|^2}} dy,$$

pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2 \times]0,+\infty[$.

Preuve:
Nous savons que $\mathbb{R}^2$ peut-être considéré comme un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ via l'identification $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \{0\} = \{(x_1,x_2,0): \ x_1,x_2 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$.
Soient $x \in \mathbb{R}^2$ et $t > 0$, alors en prenant $x = (x_1,x_2,0)$ nous écrivons d'après la formule de Kirchhoff que

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2t^2}\int_{|y-x|=ct} [tg(y) + f(y) + \nabla f(y).(y-x)]dS(y).$$

En désignant par (x_1,x_2,x_3) les points de $\mathbb{R}^3$ nous pouvons écrire avec

$$y = (y_1,y_2,y_3), \quad g(y) = g(y_1,y_2), \quad f(y) = f(y_1,y_2)$$

que

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2t^2}\int_{|y-x|=ct} [tg(y_1,y_2) + f(y_1,y_2) + \nabla f(y_1,y_2).(y-x)]dS(y)$$

Sachant qu'une sphère est formée de deux hémisphères alors

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2t^2}\left(2\int_{|y-x|=ct,\, y_3>0} [tg(y_1,y_2) + f(y_1,y_2) + \nabla f(y_1,y_2).(y-x)]dS(y)\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi c^2t^2}\int_{|y-x|=ct,\, y_3>0} [tg(y_1,y_2) + f(y_1,y_2) + \nabla f(y_1,y_2).(y-x)]dS(y) \quad (5)$$

Calculons maintenant l'élément de surface $dS(y)$
Paramétrisons d'abord l'hémisphère supérieure définie par $|y-x| = ct,\ y_3 > 0$.
On a

$$|y-x| = ct \Longrightarrow \sqrt{(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2 + y_3^2} = c^2t^2$$

d'où l'on tire

$$y_3 = \sqrt{c^2t^2 - (y_1-x_1)^2 - (y_2-x_2)^2} = \phi(y_1, y_2)$$

car $y_3 > 0$.

Par suite

$$dS(y) = \sqrt{1 + |\nabla\phi(y_1,y_2)|^2}dy_1dy_2 = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y_2}\right)^2}\ dy_1dy_2$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y_i}(y_1,y_2) = -\frac{y_i - x_i}{\sqrt{c^2t^2 - (y_1-x_1)^2 - (y_2-x_2)^2}}\ ;\ i = 1,2.$$

D'où

$$dS(y) = \frac{ct}{\sqrt{c^2t^2 - (y_1-x_1)^2 - (y_2-x_2)^2}}\ dy_1dy_2.$$

Sachant que la projection de l'hémisphère considérée sur le plan horizontal, d'équation $y_3 = 0$, est le disque $D = \{y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2,\ |y-x| < ct\}$ nous déduisons de (5) que

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi c^2t^2}\int_{|y-x|<ct} \frac{[tg(y_1,y_2) + f(y_1,y_2) + \nabla f(y_1,y_2).(y-x)]ct}{\sqrt{c^2t^2 - (y_1-x_1)^2 - (y_2-x_2)^2}}dy_1dy_2$$

i.e.

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi ct}\int_{\{y;\ |y-x|<ct\}} \frac{tg(y) + f(y) + \nabla f(y).(y-x)}{\sqrt{c^2t^2 - |y-x|^2}}dy_1dy_2$$

avec rappelons-le $x = (x_1, x_2\ ) \in \mathbb{R}^2$ et $t > 0$.

■

Exercice: On considère le problème suivant,

$$(\mathcal{P})\begin{cases} u_{tt}(x,t) = \Delta u(x,t)\ ;\ \ x \in \mathbb{R}^3, t > 0 \\ u(x,0) = g(x);\ \ x \in \mathbb{R}^3 \\ u_t(x,0) = h(x);\ x \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

où g et h sont des fonctions continues.

La solution de ce problème est donnée, en dimension 3, par la formule de Kirchhoff :

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left(t\int_{|y|=1} g(x+cty)ds(y)\right) + \frac{t}{4\pi}\int_{|y|=1} h(x+cty)\,ds(y).$$

Soit $g(x) = g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 \;\; et \;\; h(x) = 0.$

En remarquant que les fonctions g et h dépendent seulement de x_1 et x_2, utiliser la formule de Poisson (en 2D) issue de la formule de Kirchhoff (en 3D) par la méthode de descente d'Hadamard, pour déterminer explicitement la solution $u(x,t)$ de $(\mathcal{P})$.