f_{12} deplacement en DDL (1) dû à une force unitaire appliquée en DDL (2)

$$f_{12} = \frac{1}{EI} A_2 \, y_{q_1}$$

A_2 : aire du diagramme M_2

y_{q_1} : projection du C.D.G de M_2 sur M_1.

$$f_{12} = \frac{1}{EI}\left[L^2\left(\frac{1}{2}L\right) + \frac{1}{2}L^2 \times 0\right]$$

$$\boxed{f_{12} = \frac{L^3}{2EI}}$$

$$F = \frac{L^3}{EI}\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

On peut la simplifier comme suit :

$$F = \frac{L^3}{6EI}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$K = F^{-1} = \frac{1}{\det(F)}\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}^T$$

α_{ij} : determinants des comatrices associées à F multipliés par $(-1)^{i+j}$

on pose $F = \frac{L^3}{6EI} F'$. $F' = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$

$$F^{-1} = \frac{6EI}{L^3} F'^{(-1)}$$

$$F'^{(-1)} = \frac{1}{\det(F')}\begin{bmatrix} \alpha'_{11} & \alpha'_{12} \\ \alpha'_{21} & \alpha'_{22} \end{bmatrix}^T$$

$\det(F') = 18 - 9 = 7$

$\alpha'_{11} = 8\,(-1)^2 = 8$ | $\alpha_{21} = 3(-1)^3 = -3$

$\alpha'_{12} = 3\,(-1)^3 = -3$ | $\alpha_{22} = 2(-1)^4 = 2$

donc $F'^{(-1)} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}^T$

$$F'^{(-1)} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$K = F^{-1} = \frac{6EI}{7L^3}\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{6EI}{7L^3} = \frac{6 \cdot 21000}{7 \cdot 5^3} = 144$$

$$K = 144\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} (kN/m)$$

3/ Le vecteur chargement P(t)

$$P(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ P(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \sin 20t \end{Bmatrix}$$

l'equation de mouvement s'ecrit :

$$\begin{bmatrix} 1.8 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1152 & -432 \\ -432 & 288 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10 \sin 20t \end{Bmatrix}$$