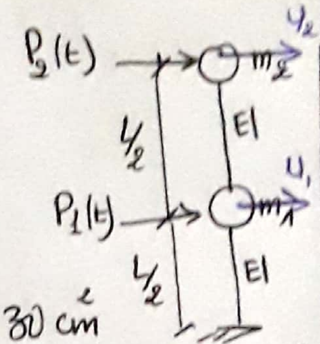
Série 1 Exercice 4

Données



$E = 2 \times 10^7 \; kN/m^2$

$L = 4\,m$

$\gamma = 2.5 \; t/m^3$

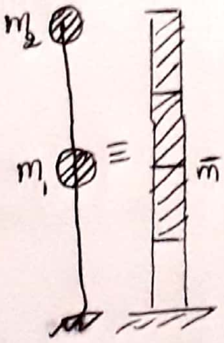
Section de la poutre $30 \times 30 \; cm^2$

1/ L'équation de Mouvement est celle d'un système à 2DDL en vibration forcées non amorties

$$M\ddot{u} + Ku = P(t)$$

Nous avons besoin de déterminer la matrice masse M, la matrice de rigidité K et le vecteur chargement

- Matrice masse M



$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$m_1 = \bar{m}\left(\frac{L}{4} + \frac{L}{4}\right) = \bar{m}\frac{L}{2}$

$m_2 = \bar{m}\frac{L}{4}$

$\bar{m}$: masse répartie de la poutre

$\bar{m} = S\gamma = 0.3^2 \times 2.5 = 0.225\, t/m$

$m_1 = \bar{m}\frac{L}{2} = 0.225 \times \frac{4}{2} = 0.45\, t$

$m_2 = \bar{m}\frac{L}{4} = 0.225 \times \frac{4}{4} = 0.225\, t$

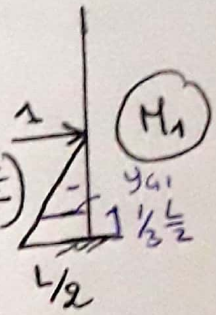
$$M = \begin{bmatrix} 0.45 & 0 \\ 0 & 0.225 \end{bmatrix} [t]$$

- Matrice de rigidité K

Il s'agit d'une poutre donc on utilise la méthode de flexibilité

$K = F^{-1}$ $\quad F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$

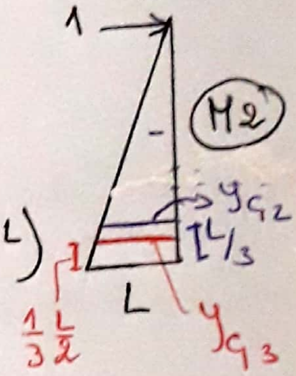
f_{ij} : déplacement (rotation) suivant le DDL i dû à une force (moment) unitaire lorsque les autres DDL sont bloqués.



$f_{11} = \frac{1}{EI} A_1 y_{G_1}$

$= \frac{1}{EI} \frac{1}{\cancel{2}}\left(-\frac{L}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right) \times \frac{\cancel{2}}{3}\left(-\frac{L}{2}\right)$

$f_{11} = \frac{L^3}{24EI}$



$f_{22} = \frac{1}{EI} A_2 y_{G_2}$

$= \frac{1}{EI} \frac{1}{\cancel{2}}(-L)L\frac{\cancel{2}}{3}(-L)$

$f_{22} = \frac{L^3}{3EI}$

$f_{21} = \frac{1}{EI} A_2 \, y_{G_3}$

$= \frac{1}{EI} \frac{1}{2} \frac{L}{2} \frac{L}{2} \cdot \frac{5L}{6}$

$\frac{y_{G_3}}{L - \frac{L}{6}} = \frac{L}{L}$ $\quad y_{G_3} = \frac{5L}{6}$

$f_{21} = \frac{5L^3}{48EI}$, $f_{12} = f_{21}$

$$F = \frac{L^3}{48EI}\overbrace{\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 16 \end{bmatrix}}^{F'}$$

$K = F^{-1} = \frac{48EI}{L^3} F'^{-1}$

$$F'^{-1} = \frac{1}{\det(F')} (\text{com}\, F')^T$$

$$\det(F') = 32 - 25 = 7$$

$$[\text{Com}(F')]^T = \begin{bmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{48EI}{7L^3} \begin{bmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$EI = 2.10^7 \times \frac{0.3^4}{12} = 13500 \text{ kN.m}$$

$$= 1446,42 \begin{bmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} [\text{kN/m}]$$

le vecteur chargement

$$P(t) = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix}$$

l'équation de mouvement est donc :

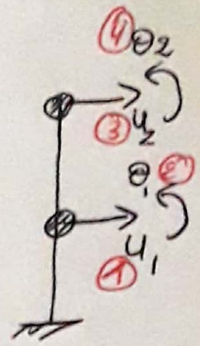
$$\begin{bmatrix} 0.45 & 0 \\ 0 & 0.225 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + 1446,42 \begin{bmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \end{Bmatrix}$$

2/ Les deplacements horizontaux et les rotations sont autorisés dans ce cas l'equation de mouvement est celle d'un systeme a 4DDL en vibrations libres non amorties

$$M\ddot{u} + Ku = P(t)$$

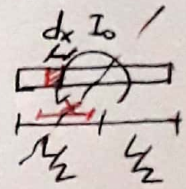
- Matrice masse M

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & I_{o_1} & & \\ & & m_2 & \\ & & & I_{o_2} \end{bmatrix}$$



I_{o_1}, I_{o_2} sont les inerties massique rotationelles utilisées dans le cas des DDL des rotations.

I_o Pour une poutre de longueur L est



$$I_o = 2 \cdot \int_0^{L/2} \bar{m} x^2 dx$$

$$= 2\bar{m} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{L/2} = 2\frac{\bar{m}L^3}{24} = \frac{\bar{m}L^3}{12}$$

I_{o_1} : correspond à une poutre de longueur $\frac{L}{2}$.

$$I_{o_1} = \frac{\bar{m}L^3/8}{12} = \frac{\bar{m}L^3}{96} = 0,15 \text{ t.m}^2$$

I_{o_2} correspond à la moitié d'une poutre de longueur $\frac{L}{2}$

$$I_{o_2} = \frac{\bar{m}L^3}{96} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\bar{m}L^3}{192} = 0.075 \text{ t.m}^2$$

$$M = \begin{bmatrix} 0.45 & & & \\ & 0.15 & & \\ & & 0.225 & \\ & & & 0.075 \end{bmatrix} \begin{matrix} [\text{t}] \\ \text{t.m}^2 \end{matrix}$$

Scanned with CamScanner