Chapitre 4 : Séries de Laurent - calcul des résidus

1) Rappels sur les suites et séries dans $\mathbb{C}$ (cas complexe)

① **Définition** : une suite $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ st une fonction qui fait associer à un entier $n\in\mathbb{N}$, un complexe z_n

$$z_n : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$n \longmapsto z_n$$

exp : $z_n = \frac{i^n}{n}$, $z_n = e^{in\frac{\pi}{12}}$

Déf ② : (convergence d'une suite)
on dit que $\{z_n\}$ converge si $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = l$ (fini)

$$z_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \iff |z_n - l| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

en module

Prop : soit $z_n = x_n + iy_n$

① $z_n \to 0 \iff \begin{cases} x_n \to 0 \\ y_n \to 0 \end{cases}$ $n\to+\infty$

② $z_n \to +\infty \iff |z_n| \longrightarrow +\infty$

Déf : Une série de nombres complexes

$$\sum z_n = z_0 + z_1 + \cdots + z_n + \cdots$$

converge si la suite $S_n = z_0 + z_1 + \cdots + z_n$ converge

c-à-d $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} z_n$

Exp : • La série géométrique $\sum\limits_{n\geq 0} z^n$ converge vers $\frac{1}{1-z}$ si $|z|<1$

si $|z|>1$, la série diverge.

Déf : Une série entière complexe est une série de la forme
$$\sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n \quad , \; a_n \in \mathbb{C}, \; n \in \mathbb{N}$$
et z_0 est dit le centre de la série.

⚠ Dans $\mathbb{C}$, les séries entières possèdent aussi un rayon de convergence et un disque de convergence

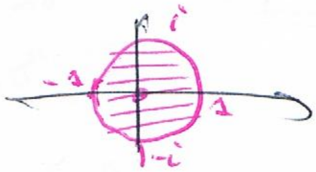
Exp : Soit $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{z^{n+1}}{(n+1)^2} \frac{n^2}{z^n}\right| = |z|$$

- Si $|z|<1$, la série converge abs
- Si $|z|>1$, la série diverge.
- Si $|z|=1$, $\sum \left|\frac{z^n}{n^2}\right| = \sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann $\alpha = 2 > 1$)

Donc $\sum \frac{z^n}{n^2}$ C.A.

ccl : Disque de convergence $D = \overline{D}(0,1)$



Développements :

exp ① Développer la fonction $\frac{1}{1-z}$ en série entière de centre $z_0 = 2i$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-2i+2i-z} = \frac{1}{1-2i-(z-2i)} = \frac{1}{1-2i} \frac{1}{1-\frac{z-2i}{1-2i}}$$

$$= \frac{1}{1-2i} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{z-2i}{1-2i}\right)^n = \sum_{n\geq 0} \underbrace{\frac{1}{(1-2i)^{n+1}}}_{a_n} (z-2i)^n$$

Ex ② : Developper $\frac{1}{1-z}$ autour de 2 et -2

autour de 2

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-2+2-z} = \frac{1}{-1-(z-2)} = \frac{-1}{1+(z-2)} = -\sum_{n\geq 0} (-1)^n (z-2)^n$$

autour de -2

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1+2+2-z} = \frac{1}{3-(z+2)} = \frac{1}{3}\, \frac{1}{1-\frac{z+2}{3}} = \frac{1}{3} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{z+2}{3}\right)^n$$

Série de Laurent

La série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ est appelée série de Laurent de centre z_0 et de coefficients $\{a_n\} \in \mathbb{C}$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} = \cdots\cdots + \underbrace{\frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2}}_{a_{-2}(z-z_0)^{-2}} + \underbrace{\frac{a_{-1}}{z-z_0}}_{a_{-1}(z-z_0)^{-1}} + a_0 + a_1 (z-z_0) + \cdots$$

* La série $\sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$ est dite partie régulière

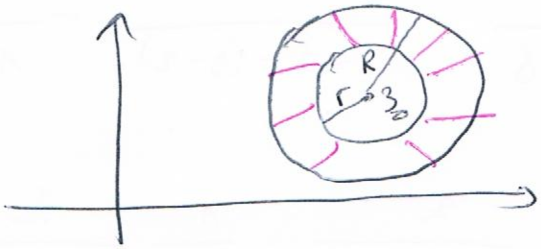
↳ si elle converge pour $|z-z_0| < R$ vers $f_1(z)$ alors f_1 est holomorphe sur $|z-z_0| < R$

* La série $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ est dite partie singulière de la série de Laurent.

↳ si elle converge pour $\left|\frac{1}{z-z_0}\right| < r'$ (ou bien $|z-z_0| > \frac{1}{r'} = r$) vers $f_2(z)$, alors f_2 est holomorphe sur $|z-z_0| > r$.

Ainsi, la série de Laurent converge dans la couronne

$\Delta : \quad r < |z - z_0| < R$



on note $\Delta(z_0, r, R)$ la couronne $\{z \in \mathbb{C},\ r < |z - z_0| < R\}$

⚠ si $r = 0$, $\Delta(z_0, 0, R)$ est dit disque pointé.

Remarque

si $S \subset \Delta$ est une couronne fermé concentrique à Δ, c-à-d

$$S = \{z \in \mathbb{C},\ r_1 \leq |z - z_0| \leq R_1\} \quad \text{ou} \quad r < r_1 < R_1 < R$$

alors la série de Laurent est normalement convergente dans $S \subset \Delta$

* Par conséquent : $\forall S \subset \Delta$, la série de Laurent peut être intégrer terme à terme sur S ;

De plus $f'(z) = \displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$

Thm de Laurent : si f est holomorphe dans $\Delta(z_0, r, R)$ alors

i) $\forall z \in \Delta(z_0, r, R)$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

f est développ. en série de Laurent

ii) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall \rho \in \,]r, R[$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z - z_0| = \rho} \frac{f(s)}{(s - z_0)^{n+1}}\, ds$$

Exo

① $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)}$ est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$,

D'après le théorème de Laurent, elle doit être developpable en série de Laurent sur toute couronne contenue dans $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$

$\longrightarrow$ exemple sur : $0 < |z| < 1$

on a

$$\frac{1}{z(1-z)} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} = \underbrace{\cdots + 0\times\frac{1}{z^4} + 0\times\frac{1}{z^3} + 0\times\frac{1}{z^2} + 1\times\frac{1}{z}}_{\text{partie singulière}}$$

$$+ \underbrace{\sum_{n\geq 0} z^n}_{\text{régulière.}}$$

② Dans $\Delta = \{ z \in \mathbb{C}\ ,\ 1 < |z| < 3 \}$ donner le develop de Laurent de $f(z) = \dfrac{2}{(z+1)(z+3)} = \dfrac{1}{z+1} - \dfrac{1}{z-3}$

* $|z| > 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{|z|} < 1$, on a

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z\left(1+\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}(-1)^n \frac{1}{z^n} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{z^{n+1}}$$

* $|z| < 3 \Rightarrow \left|\dfrac{z}{3}\right| < 1$, on a

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1+\frac{z}{3}} = \frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}} z^n$$

Donc

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}}_{\text{singulière}} - \underbrace{\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}} z^n}_{\text{régulière}}$$

Classification des singularités :

Soit la série

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

La partie singulière de la série de Laurent est

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$$

Le point z_0 est dit **un point de singularité**

Types de singularité

z_0	Série de Laurent $0<\lvert z-z_0\rvert<R$ $f(z)=$
singularité apparente ou bien fausse singularité	$a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$
pôle simple	$\frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots$
pôle d'ordre n	$\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots$
singularité essentielle	$\dots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots$

f n'est pas définie en z_0 mais admet un prolongement

plus rare

Exp : ① $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, 0 est une singularité apparente

car $\frac{\sin z}{z} = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots$

② $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}$, 0 est un pôle simple car

$$\frac{\sin z}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{z}{3!} + \frac{z^3}{5!} + \dots$$

③ $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^4}$, 0 est un pôle d'ordre 3 car

$$\frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!\,z} + \frac{z}{5!} \cdots\cdots$$

④ $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$, 0 est une singularité essentielle car

$$e^{z} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots\cdots$$

$$\Rightarrow e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!\,z^1} + \frac{1}{2!\,z^2} + \cdots\cdots$$

Propriétés; (Pour reconnaître la nature d'un pôle)

① Une fonction analytique f dans $0<|z-z_0|<R$ possède un pôle d'ordre n en z_0 ssi f peut être écrite sous la forme

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z-z_0)^n}$$

où ϕ est analytique et $\boxed{\phi(z_0) \neq 0}$.

② z_0 est un pôle d'ordre n $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \pm\infty$

③ z_0 est une singularité apparente $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ est fini

④ z_0 est une singularité essentielle $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{z\to z_0}$ n'existe pas

Résidus : Une application puissantes des dévelloppement de Laurent est le calcul général de l'intégrale curviligne d'une fonction holomorphe privé d'un nombre fini de singularités $z_1, z_2, \dots, z_p$ et γ un chemin fermé entourant ses singularités

Déf : Le coefficient a_{-1} dans la série de Laurent est dit résidus de la fonction f au point z_0, noté :

$$\boxed{a_{-1} = Res(f, z_0)}$$

Exp : ① $f(z) = \frac{12}{z^2} + \frac{1}{z}$, 0 est un pôle d'ordre 2

$\hookrightarrow$ $Res(f, 0) = 1$

② $f(z) = e^{\frac{3}{z}}$ $\longrightarrow$ nous avons déjà trouvé

$$f(z) = 1 + \frac{3}{z} + \frac{3^2}{2z^2} + \dots$$

0 est essentielle et on a $Res(f, 0) = 3$

Quelques méthode pour le calcul des Résidus :

① Si f possède un pôle simple au point z_0 alors

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

② Si f possède un pôle d'ordre n au point z_0 alors

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(n-1)!} \Big[(z - z_0)^n f(z) \Big]^{(n-1)}$$

3) Si $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ et h possède un zéro d'ordre 1

alors
$$Res(f, z_0) = Res\left(\frac{g}{h}, z_0\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$

Exp : ① $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-3)}$

f admet 3 comme pôle simple d'ordre 1

car $f(z) = \frac{\frac{1}{(z-1)^2}}{(z-3)^1}$ ϕ (z_0)

et 1 comme pôle d'ordre 2

car $f(z) = \frac{\frac{1}{z-3}}{(z-1)^2}$ ϕ (z_0)

$$Res(f, 3) = \lim_{z \to 3} (z-3) f(z)$$
$$= \lim_{z \to 3} \frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{4}$$

$$Res(f, 1) = \frac{1}{1!} \lim_{z \to 1} \left[(z-1)^2 f(z)\right]'$$
$$= -\frac{1}{4}$$

② $f(z) = \frac{z^2}{z^4+1} \longrightarrow z^4+1=0 \Longrightarrow z^4 = -1 \Rightarrow z_k = e^{i\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi i}{2}}$ $k \in \mathbb{Z}$

$g(z) = z^2$, $h(z) = z^4+1$, on a $Res(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} = \frac{z_0^2}{4z_0^3} = \frac{1}{4\, e^{\frac{\pi i}{4}}}$

Applications des Résidus :

on sait que $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}} ds$

donc $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(s) ds$

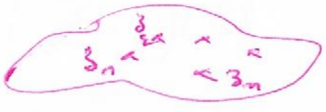
Idée

$$\Longrightarrow \int_\gamma f(s) ds = 2\pi i \, a_{-1} = 2\pi i \, Res(f, z_0)$$

avec γ est une courbe simple et fermé entourant z_0.

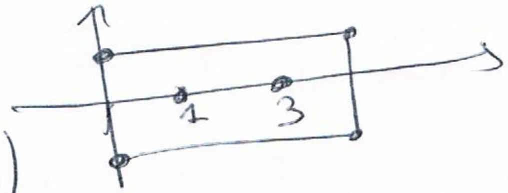
Théorème des Résidus :

Soit D un domaine simplement connexe et γ la frontière de D
Si f est analytique dans D sauf en un nombre fini de points $z_1, z_2, \dots, z_n$, alors



$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_k).$$

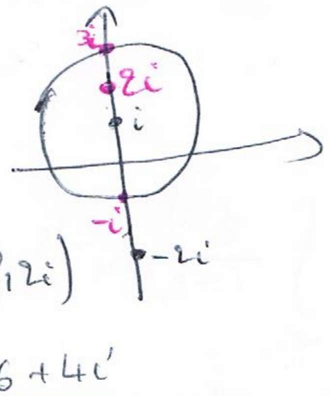
Exp : ① $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{(z-1)^2(z-3)}$ γ est le carré de sommets $(0,-1)$, $(4,-1)$, $(4,1)$ et $(0,1)$



$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-1)^2(z-3)} = 2\pi i\left(\mathrm{Res}(f,1) + \mathrm{Res}(f,3)\right)$$

déjà calculé $\displaystyle = 2\pi i\left(\frac{-1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 0$

② $\displaystyle\int_{|z-i|=2} \frac{2z+6}{z^2+4}\,dz$ on a $z^2+4 = (z+2i)(z-2i)$



$$\int_{|z-i|=2} \frac{2z+6}{z^2+4}\,dz = 2\pi i\,\mathrm{Res}(f, 2i)$$

$$= 2\pi i\,\frac{6+4i}{4i}$$

car $\displaystyle\mathrm{Res}(f, 2i) = \lim_{z\to 2i} (z-2i)\frac{2z+6}{(z+2i)(z-2i)} = \frac{6+4i}{4i}$