

Séries de Laurent et résidus.

Exercice 1 Donner le développement en série de Laurent de la fonction suivante en précisant dans quelles parties de \mathbb{C} elles sont valables.

$$\frac{1}{(z+2)(z-1)}, \quad \text{autour de } 0, \quad de \quad -2.$$

Exercice 2 Quels sont les points singuliers des fonctions suivantes, préciser leurs types puis calculer les résidus.

$$\begin{aligned}
 1) \frac{e^z}{z^2(z-1)(z-2)}, \quad 2) \frac{e^z}{z}, \quad 3) \frac{1-\cos(z)}{z}, \quad 4) \frac{1}{z^3-z^5}, \\
 5) \frac{e^{iz}}{z^2+1}, \quad 6) \frac{\ln(1+z)}{z^2}, \quad 7) \frac{1-e^z}{1+e^z}.
 \end{aligned}$$

Exercice 3 Calculer les intégrales suivantes

$$\begin{aligned}
 1) \int_{|z|=2} \tan z dz, \quad 2) \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^4+5z^3} dz, \quad 3) \int_{|z|=1} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz, \\
 4) \int_{|z+3i|=3} \frac{z}{(z^2+4z+13)^2} dz, \quad 5) \int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^4-1}.
 \end{aligned}$$

Exercice 4 Calculer l'intégrale suivante

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} + \cos \theta}.$$

Exercice 5 Calculer les intégrales suivantes

$$1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}, \quad 2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}, \quad 3) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}.$$

Exercice 6 Calculer les intégrales suivantes

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx.$$

Exercices supplémentaires:

Exercice 1: Donner le développement en série de Laurent des fonctions suivantes en précisant dans quelles parties de \mathbb{C} elles sont valables.

$$\frac{z}{z^2 - 1}, \quad \text{autour de } 0, \text{ de } 2, \text{ de } 1.$$

Exercice 2: 1. Développer en série de Laurent la fonction dans les couronnes indiquées:

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)},$$

a) $2 < |z| < 3$, b) $3 < |z| < +\infty$.

2. Examiner les différents développements en série de Laurent de la fonction $f(z) = \frac{z^2 - z + 3}{z^2 - 3z + 2}$ en posant $z_0 = 0$.

Exercice 3: Calculer les résidus des fonctions suivantes

$$1) f(z) = z^{2n}(1+z)^{-n}, \quad 2) f(z) = \frac{1 - e^z}{1 + e^z}, \quad 3) f(z) = e^{2z+1}.$$

Exercice 4: 1. Trouver les résidus de la fonction

$$f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$$

en ses points singuliers.

2. Trouver le résidu de la fonction $f(z) = z^3 \sin \frac{1}{z}$ en son point singulier.

Exercice 5: 1. En utilisant la formule des résidus, calculer l'intégrale

$$\int_{|z-i|=\frac{3}{2}} \frac{\exp\left(\frac{1}{z^2}\right)}{z^2 + 1} dz.$$

2. En utilisant la formule des résidus, calculer l'intégrale

$$\int_{|z|=2} \frac{\sin\left(\frac{1}{z}\right)}{z-1} dz.$$