Séries de Laurent et résidus.

Exercice 1 Donner le développement en série de Laurent de la fonction suivante en précisant dans quelles parties de $\mathbb{C}$ elles sont valables.

$$\frac{1}{(z+2)(z-1)}, \quad \text{autour de} \quad 0, \quad de \quad -2.$$

Exercice 2 Quels sont les points singuliers des fonctions suivantes, préciser leurs types puis calculer les résidus.

$$1)\ \frac{e^z}{z^2(z-1)(z-2)}, \qquad 2)\ \frac{e^z}{z}, \qquad 3)\ \frac{1-\cos(z)}{z}, \qquad 4)\ \frac{1}{z^3-z^5},$$

$$5)\ \frac{e^{iz}}{z^2+1}, \qquad 6)\ \frac{\ln(1+z)}{z^2}, \qquad 7)\ \frac{1-e^z}{1+e^z}, \qquad 8)\ f(z) = \frac{ze^z}{z^2-1}.$$

Exercice 3 Calculer les intégrales suivantes

$$1)\ \int_{|z|=2} \tan z dz, \qquad 2)\ \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^4+5z^3} dz, \qquad 3)\ \int_{|z|=1} \sin(\frac{1}{z}) dz,$$

$$4)\ \int_{|z+3i|=3} \frac{z}{(z^2+4z+13)^2} dz, \qquad 5)\ \int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^4-1}.$$

Exercice 4 Calculer l'intégrale suivante

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}+\cos\theta}.$$

Exercice 5 Calculer les intégrales suivantes

$$1)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}, \qquad 2)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^3}, \qquad 3)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}.$$

Exercice 6 Calculer les intégrales suivantes

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dxx.$$

Solution:

Exercice 1: Dans un premier temps, on essaye d'écrire la fonction sous une forme convenable. Posons,

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-1)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+2}.$$

Par identification, on aboutit à

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)(z-1)} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2}\right].$$

Nous commence par le premier cas (autour de 0):

1- Si $|z| < 1$, alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{z}{2}+1}\right] = \frac{1}{3}\left[-\sum_{n\geq 0} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n\right], \\ &= -\frac{1}{3}\sum_{n\geq 0} z^n - \frac{1}{6}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

2- Si $1 < |z| < 2$, alors

$$f(z) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{z}{2}+1}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}(\frac{1}{z})^n - \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n\right].$$

3- Si $2 < |z| < +\infty$, alors

$$f(z) = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{2}{z}}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}(\frac{1}{z})^n - \frac{1}{z}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\left(\frac{2}{z}\right)^n\right].$$

Nous passons au deuxième cas (autour de -2):

1 - Si $0 < |z+2| < 3$, alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z+2-3} - \frac{1}{z+2}\right], \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\frac{1}{\frac{z+2}{3}-1} - \frac{1}{z+2}\right] = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{3}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{z+2}{3}\right)^n - \frac{1}{z+2}\right]. \end{aligned}$$

2- Si $3 < |z+2| < +\infty$, alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2}\right] = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z+2-3} - \frac{1}{z+2}\right], \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{z+2}\frac{1}{\frac{3}{z+2}-1} - \frac{1}{z+2}\right] = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{z+2}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{3}{z+2}\right)^n - \frac{1}{z+2}\right]. \end{aligned}$$

Exercice 2:

1. Soit $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z-1)(z-2)}$. Nous remarquons que les points singuliers sont 0, 1 et 2. Le point 0 est un pôle double, par contre 1 et 2 sont des pôles simples. Donc, nous avons

$$\begin{aligned} Res(f,0) &= \frac{1}{1}\lim_{z\to 0}\left[z^2\frac{e^z}{z^2(z-1)(z-2)}\right]' = \frac{5}{4}. \\ Res(f,1) &= \lim_{z\to 1}\left[(z-1)\frac{e^z}{z^2(z-1)(z-2)}\right] = -e. \\ Res(f,2) &= \lim_{z\to 2}\left[(z-2)\frac{e^z}{z^2(z-1)(z-2)}\right] = \frac{e^2}{4}. \end{aligned}$$

2. Soit $f(z) = \frac{e^z}{z}$. Le point 0 est un pôle simple et donc

$$Res(f, 0) = \lim_{z \to 0} z \frac{e^z}{z} = 1.$$

3. Nous avons

$$f(z) = \frac{1 - \cos z}{z} = \frac{1 - (1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots)}{z} = \frac{z}{2!} - \frac{z^3}{4!} + \ldots$$

Par conséquent, 0 est une singularité apparente. Donc, $Res(f, 0) = 0$.

4. Soit

$$f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5} = \frac{1}{z^3} \frac{1}{1 - z^2}.$$

Le point 0 est un pôle d'ordre 3, par contre -1 et 1 sont des pôles simples. Nous avons

$$\begin{aligned} Res(f, 0) &= \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \left[z^3 \frac{1}{z^3} \frac{1}{1 - z^2} \right]'' = 1. \\ Res(f, 1) &= \lim_{z \to 1} \left[(z - 1) \frac{1}{z^3} \frac{1}{1 - z^2} \right] = -\frac{1}{2}. \\ Res(f, -1) &= \lim_{z \to -1} \left[(z + 1) \frac{1}{z^3} \frac{1}{1 - z^2} \right] = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

5. Soit $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 1}$. Les points i et $-i$ sont des pôles simples. Nous avons

$$\begin{aligned} Res(f, i) &= \lim_{z \to i} \left[(z - i) \frac{e^{iz}}{(z + i)(z - i)} \right] = \frac{e^{-1}}{2i}. \\ Res(f, -i) &= \lim_{z \to -i} \left[(z + i) \frac{e^{iz}}{(z + i)(z - i)} \right] = \frac{e}{-2i}. \end{aligned}$$

6. Soit $f(z) = \frac{\ln(1+z)}{z^2}$. Nous avons

$$f(z) = \frac{\ln(1 + z)}{z^2} = \frac{z - z^2/2 + z^3/3 + \ldots}{z^2} = \frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \frac{z}{3} + \ldots.$$

Donc, 0 est un pôle simple et on observe $Res(f, 0) = 1$.

7. Soit

$$f(z) = \frac{1 - e^z}{1 + e^z}.$$

Si $1 + e^z = 0$, alors $z_k = (2k + 1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$. Nous avons

$$Res(f, (2k + 1)\pi i) = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)} = \frac{1 - e^{(2k+1)\pi i}}{e^{(2k+1)\pi i}} = -2.$$

8. Soit $f(z) = \frac{ze^z}{z^2 - 1}$. Les points -1 et 1 sont des pôles simples. Nous avons

$$\begin{aligned} Res(f, 1) &= \lim_{z \to 1} \left[(z - 1) \frac{ze^z}{z^2 - 1} \right] = -\frac{e}{2}. \\ Res(f, -1) &= \lim_{z \to -1} \left[(z + 1) \frac{ze^z}{z^2 - 1} \right] = -\frac{e^{-1}}{2}. \end{aligned}$$

Exercice 3:

1. Nous avons

$$\int_{|z|=2} \tan(z) dz = \int_{|z|=2} \frac{\sin z}{\cos z} dz.$$

Si $\cos z = 0$ alors $z_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Dans notre cas ($|z| = 2$), les singularités sont $\dfrac{-\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=2} \tan(z) dz &= 2\pi i \left(Res(f, \frac{\pi}{2}) + Res(f, -\frac{\pi}{2}) \right), \\
&= 2\pi i \left(\frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{-\sin(\frac{\pi}{2})} + \frac{\sin(-\frac{\pi}{2})}{-\sin(-\frac{\pi}{2})} \right) = -4\pi i.
\end{aligned}$$

2. Nous avons

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^4 + 5z^3} dz &= \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^3(z+5)} dz = 2\pi i Res(f, 0), \\
&= 2\pi i \left(\frac{1}{2} \lim_{z \to 0} \left[z^3 \frac{e^z}{z^3(z+5)} \right]'' \right) = \frac{17\pi i}{125}.
\end{aligned}$$

3. On sait que

$$\sin(\frac{1}{z}) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3! z^3} + \ldots \quad \Rightarrow \quad Res(f, 0) = 1.$$

Ainsi,

$$\int_{|z|=1} \sin(\frac{1}{z}) dz = 2\pi i.$$

4. Nous avons

$$\int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{z^4 - 1} = 2\pi i Res(f, i) = 2\pi i \lim_{z \to 0} (z - i) \frac{1}{z^4 - 1} = 2\pi i (\frac{1}{4i^3}) = -\frac{\pi}{2}.$$

Exercice 4:
Nous avons

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2} + \cos(\theta)} &= \int_{|z|=1} \frac{1}{\sqrt{2} + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{iz}, \\
&= \frac{-2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 2\sqrt{2}z + 1}, \\
&= \frac{-2}{i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{(z - 1 - \sqrt{2})(z + 1 - \sqrt{2})}, \\
&= \frac{-2}{i} 2\pi i Res\left(\frac{1}{(z - 1 - \sqrt{2})(z + 1 - \sqrt{2})}, \sqrt{2} - 1 \right), \\
&= -4\pi \lim_{z \to \sqrt{2} - 1} \frac{1}{(z - 1 - \sqrt{2})(z + 1 - \sqrt{2})} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 5:
1. Soit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}.$$

Nous avons

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+9)} = 2\pi i \left[Res(f, i) + Res(f, 3i) \right].$$

Après calcul, on obtient

$$Res(f, i) = \frac{1}{16i}, \quad Res(f, 3i) = -\frac{1}{48}.$$

Par conséquent,

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+9)} = 2\pi i \left(\frac{1}{16i} - \frac{1}{48i}\right) = \frac{\pi}{12}.$$

D'autre part,

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+9)} = \int_{\gamma_R} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+9)} + \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)}.$$

Si $R \to +\infty$, alors $\int_{\gamma_R} \frac{dz}{(z^2+1)(z^2+9)} \to 0$ car le degré de $(z^2+1)(z^2+9)$ est $4 \geq 0+2$. Nous obtenons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+9)} = \frac{\pi}{12}.$$

2. Soit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$$

D'un autre côté, nous avons

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+1)^3} = 2\pi i Res(f,i).$$

Nous calculons

$$Res(f,i) = \frac{1}{2}\lim_{z\to i}\left[(z-i)^3\frac{1}{(z^2+1)^3}\right]'' = \frac{3}{16i}.$$

Par conséquent,

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+1)^3} = 2\pi i\left(\frac{3}{16i}\right) = \frac{3\pi}{8}.$$

On a aussi

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+1)^3} = \int_{\gamma_R} \frac{dz}{(z^2+1)^3} + \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$$

Si $R \to +\infty$, alors $\int_{\gamma_R} \frac{dz}{(z^2+1)^3} \to 0$ car le degré de $(z^2+1)^3$ est $6 \geq 0+2$. Nous obtenons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{3\pi}{8}.$$

3. Soit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}.$$

On calcule

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^4+1}.$$

Si $z^4+1=0$, alors $z_k = e^{\frac{(2k+1)\pi i}{4}}$, $k=0,1,2,3$. On obtient donc $z_0 = e^{\frac{\pi i}{4}}$, $e^{\frac{3\pi i}{4}}$, $e^{\frac{5\pi i}{4}}$ et $e^{\frac{7\pi i}{4}}$. Clairement, les singularités à l'intérieur de γ sont z_0 et z_1. On a

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i\left[Res(f,e^{\frac{\pi i}{4}}) + Res(f,e^{\frac{3\pi i}{4}})\right].$$

Après calcul, nous obtenons

$$Res(f, e^{\frac{\pi i}{4}}) = \frac{1}{4e^{\frac{3\pi i}{4}}}, \qquad Res(f, e^{\frac{3\pi i}{4}}) = \frac{1}{4e^{\frac{9\pi i}{4}}}.$$

Donc,

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i \left[\frac{1}{4e^{\frac{3\pi i}{4}}} + \frac{1}{4e^{\frac{9\pi i}{4}}}\right] = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

D'autre part

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^4+1} = \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^4+1} + \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4+1}.$$

Si $R \to +\infty$, alors $\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^4+1} \to 0$ car le degré de z^4+1 est $4 \geq 0+2$. Nous obtenons

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Exercice 6:
Soit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz &= 2\pi i Res(f, i), \\
&= 2\pi i \lim_{z\to i} (z-i) \frac{e^{iz}}{z^2+1}, \\
&= 2\pi i \frac{e^{-1}}{2i} = \pi e^{-1}.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \frac{\ln z}{z^2+1} dz &= \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx + \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz, \\
&= \pi e^{-1}.
\end{aligned}$$

Si $R \to +\infty$, alors

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1} = 0, \quad \text{car le pôlynome} \quad z^2+1 \quad \text{est de degré 2 qui est } \geq 0+1.$$

Donc,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1} dx = \pi e^{-1}.$$

Ce qui implique que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx = \pi e^{-1}.$$