Chapitre 5 : Applications aux calculs d'intégrales de fonctions réelles

① Intégrales de la forme $\int_0^{2\pi} F(\cos(\theta), \sin(\theta))\, d\theta$

L'idée principale est de convertir l'intégrale trigonométrique de la forme $\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$ en une intégrale complexe sur le cercle unité $|z| = 1$,

soit $z = e^{i\theta}$ avec $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$dz = i\underbrace{e^{i\theta}}_{z}\,d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z - z^{-1}}{2}$$

L'intégrale est dans ce cas

$$\int_{|z|=1} f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{dz}{iz}$$

Exp :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2} = \int_{|z|=1} \frac{1}{\left(2 + \frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2}\frac{dz}{iz}$$

$$= \frac{4}{i}\int_{|z|=1} \frac{z}{(z^2+4z+1)^2}\,dz$$

$$= \frac{4}{i}\int_{|z|=1} \frac{z}{(z+2+\sqrt{3})^2(z+2-\sqrt{3})^2}\,dz$$

$$= \frac{4}{i}\,2\pi i\,\mathrm{Res}(f, -2+\sqrt{3})$$

nous avons $-2+\sqrt{3}$ est un pôle d'ordre 2

Alors,

$$\mathrm{Res}(f, -2+\sqrt{3}) = \lim_{z \to -2+\sqrt{3}} \left[(z+2-\sqrt{3})^2 \frac{z}{(z+2+\sqrt{3})^2(z+2-\sqrt{3})^2}\right]'$$

$$= \lim_{z \to -2+\sqrt{3}} \frac{-z+2+\sqrt{3}}{(z+2+\sqrt{3})^3} = \frac{1}{6\sqrt{3}}$$

Ainsi

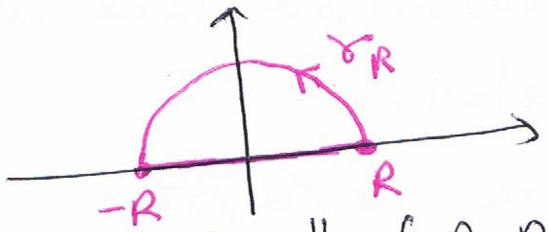
$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2} = \frac{4}{i}\,2\pi i \times \frac{1}{6\sqrt{3}}$$

$$= \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$$

2) Intégrales de la formes $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

Supposons que f est définie et continue sur $]-\infty, +\infty[$.

1) Remplaçons la variable x par la variable complexe z, puis on intègre la fonction $f(z)$ sur γ le contour suivant



$\gamma = \gamma_R \cup]-R, R[$

γ est la réunion de l'intervalle $[-R, R]$ et le demi cercle γ_R.

2) on a
$$\left.\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\,dz &= \int_{\gamma_R} f(z)\,dz + \int_{-R}^{R} f(x)\,dx \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k)\end{aligned}\right\} (*)$$

avec z_k, $k = 1, 2, \dots, n$, les pôles de f inclus à l'intérieur de γ.

3) Si on montre que $\int_{\gamma_R} f(z)\,dz \longrightarrow 0$ quand $R \longrightarrow +\infty$

alors $(*) \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \int_{-R}^{R} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_k)$

Thm : soit f une fonction complexe continue sur un secteur $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$. soit f une fct telle que
$$\lim_{|z| \to +\infty} z f(z) = 0.$$
si γ_R est un demi cercle de rayon R

alors,
$$\int_{\gamma_R} f(z)\,dz \longrightarrow 0 \quad \text{quand } R \to +\infty$$

Corrolaire : soit $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$

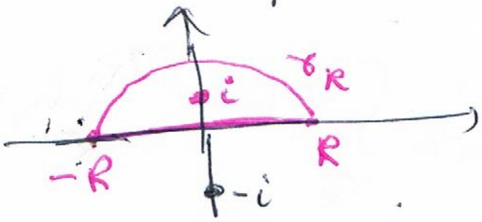
où P et Q sont des polynomes de degrés n et m, respectivement avec $m \geq n + 2$.

si γ_R est un demi-cercle de Rayon R, alors
$$\int_{\gamma} f(z)\,dz \longrightarrow 0 \quad \text{quand } R \to +\infty$$

Exp : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$

1) Posons $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$, elle possède i et $-i$ comme pôle simples.

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i)$$



on a $\displaystyle \operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z \to i} (z-i) \frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{2i}$

Donc $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+1} = \pi$

D'autre part, $\displaystyle \pi = \int_{\gamma} \frac{dz}{z^2+1} = \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2+1} + \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2+1}$

② Par le théorème précédent, (ou le corrolaire)

$$\lim_{|z| \to +\infty} z f(z) = 0,$$

alors

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0,$$

d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \pi .$$

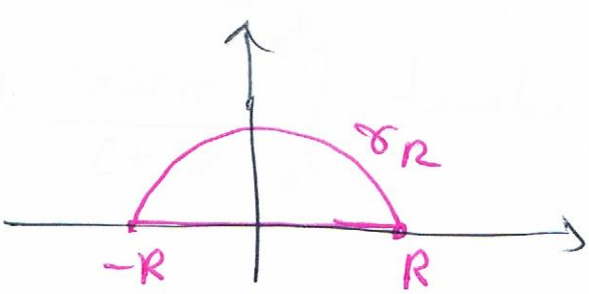
③ Integrales de la forme $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(\alpha x)\,dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(\alpha x)\,dx$

On sait que $e^{i\alpha x} = \cos \alpha x + i \sin \alpha x$, $\alpha > 0$

alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{i\alpha x}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(\alpha x)\,dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \alpha x \,dx$

supposons que $f(z)$ est continue sur $]-\infty, +\infty[$, nous utilisons la méthode précédente. Il reste le terme

$$\int_{\gamma_R} f(z)\, e^{i\alpha z}$$



Thm : Si $\lim\limits_{|z|\to+\infty} f(z)=0$

et si γ_R est un demi cercle de centre o et de rayon R, alors

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f(z)\, e^{i\alpha z}\, dz = 0$$

Corrollaire :

Si $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ avec P est un polynome de degré n et Q est de degré $m \geq n+1$.

Si γ_R est un demi-cercle de rayon R alors :

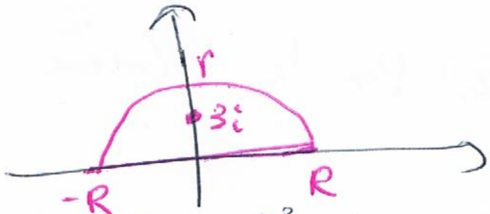
$$\int_{\gamma_R} f(z)\, e^{i\alpha z} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 0$$

Exp : Calculer $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+9}\,dx$

Nous avons déjà $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+9}\,dx$ (par parité)

Considérons

$$\int_{\gamma}\frac{z\, e^{iz}}{z^2+9}\,dz = 2\pi i\, \mathrm{Res}(f, 3i)$$



$$= 2\pi i\left(\lim_{z\to3i}(z-3i)\frac{z\, e^{iz}}{z^2+9} = \lim_{z\to3i}\frac{z\, e^{iz}}{z+3i} = \frac{e^{-3}}{2}\right)$$

D'autre part,

$$\int_{\gamma}\frac{z\, e^{iz}}{z^2+9}\,dz = \int_{\gamma_R}\frac{z\, e^{iz}}{z^2+9}\,dz + \int_{-R}^{R}\frac{x\, e^{ix}}{x^2+9}\,dx = \pi i\, e^{-3}$$

on a $\displaystyle\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R}\frac{z\, e^{iz}\, dz}{z^2+9} = 0$ car $\lim\limits_{|z|\to+\infty} f(z)=0$

Donc $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\, e^{ix}}{x^2+9}\,dx = \frac{\pi i}{e^3}$$

et par la suite $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+9}\,dx = \frac{\pi}{e^3}$$

et finalement $$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+9}\,dx = \frac{\pi}{2e^3}$$