Chapitre 3 : Théorie du contrôle optimal non linéaire (2ème partie)

3.2.2°) Problèmes de contrôle optimal de type B.

Les problèmes de contrôle optimal de type B sont les problèmes de contrôle optimal avec un état final $X(T)$ fixé et T est libre ou fixé.

C'est-à-dire sont les problèmes de la forme,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \ t \in [t_0, T], \\ x(t_0) = x_0, \ x(T) = x_1, \\ \inf\limits_{u \in U_{adm}} C(u), \end{cases} \qquad \text{C.O.B}$$

avec

$$C(u) = \Psi(T) + \int_{t_0}^{T} g(t, x(t), u(t))\, dt,$$

et T est libre ou fixé.

Définition (Hamiltonien) : Le Hamiltonien associé au système de contrôle optimal C.O.B st l'application

$$H : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \{0,1\} \times U \longrightarrow \mathbb{R} \text{ telle que}$$

$$H(t,x,\lambda,\lambda_0,u) = \langle \lambda, f(t,x,u) \rangle + \lambda_0\, g(t,x,u).$$

On a le résultat suivant :

Théorème 3.4 : Principe du maximum de Pontryaguine

On ~~suppose~~ considère le problème de contrôle optimal C.O.B et on suppose que les hypothèses Hi) pour $i=1,\dots,7$ sont satisfaites.

Si u^* est le contrôle optimal et x^* est la trajectoire optimal associée. Alors il existe une application $\lambda : [t_0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue, et un réel $\lambda_0 \geqslant 0$, tels que

i) $(\lambda, \lambda_0) \neq (0_{\mathbb{R}^n}, 0)$ (C'est-à-dire le couple (λ, λ_0) est non trivial).

ii) $$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(t, x^*(t), \lambda(t), \lambda_0, u^*(t)) \text{ p.p. } t \in [t_0, T]$$

$$= f(t, x^*(t), u^*(t)) \text{ p.p. } t \in [t_0, T]$$

$$x^*(t_0) = x_0, \quad x^*(T) = x_1,$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x^*(t), \lambda(t), \lambda_0, u^*(t)) \text{ p.p. } t \in [t_0, T]$$

$$= -{}^t\left[\frac{\partial f}{\partial x}(t, x^*(t), u^*(t))\right] \cdot \lambda(t) - \lambda_0 \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(t, x^*(t), u^*(t)) \text{ p.p. } t \in [t_0, T]$$

iii) $$u^*(t) \in \arg\min_{v \in U} H(t, x^*(t), \lambda(t), \lambda_0, v) \text{ p.p. } t \in [t_0, T]$$

C'est-à-dire,

$$H(t, x^*(t), \lambda(t), \lambda_0, u^*(t)) = \min_{v \in U} H(t, x^*(t), \lambda(t), \lambda_0, v) \text{ p.p. } t \in [t_0, T]$$

$$\boxed{3.31°}$$

iv) Si de plus le temps final T est libre, on a

$$H(T, x^*(T), \lambda(T), \lambda_0, u^*(T)) = -\lambda_0 \Psi'(T).$$

Un quadruplet $(x^*, u^*, \lambda, \lambda_0)$ satisfait les conditions ci-dessus est appelé une extrémale.

<u>Remarque</u> : Extrémales normales et anormales

Comme $(\lambda, \lambda_0) \neq (0_{\mathbb{R}^n}, 0)$, deux cas peuvent se produire

i) $\lambda_0 \neq 0$, alors on a $\lambda_0 = 1$.
Dans ce cas on dit que l'extrémale est normale.

ii) Si $\lambda_0 = 0$, on a necessairement $\lambda \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, on dit que l'extrémale est anormale.

Remarque : Dans le cas où $U = \mathbb{R}^k$, c'est-à-dire, lorsqu'il n'y a pas de contrainte sur le contrôle, la condition iii) du théorème précédent devient $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$.

Le résultat suivant donne des conditions suffisantes d'existence d'un contrôle optimal.

Théorème 3.5. : (Théorème de Mangasarian).

Supposons que les hypothèses du Théorème 3.4 sont satisfaites et on suppose que u^* est un contrôle optimal avec $\lambda_0 = 1$, c'est-à-dire que l'extrémale est normale. Alors le principe du maximum de Pontryaguine (PMP) fournit une condition suffisante d'optimalité sous les hypothèses suivantes :

i) $U_{adm} = L^2([t_0, T]; U)$, avec T fixe et U un sous ensemble convexe fermé non vide ;

ii) La fonction $(x,u) \longmapsto H(t,x,\lambda,1,u)$ est convexe pour presque tout $t \in [t_0,T]$.

Exemples d'application

Exemple 1 : On considère le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), \quad t \in [0,4], \\ x(0) = 0, \quad x(4) = 1, \\ \min\limits_{u \in \mathbb{R}} \displaystyle\int_0^4 \left(u^2(t) + x(t)\right) dt. \end{cases}$$

Exemple1

Solution : On définit le Hamiltonien H ~~défini~~ par :

$$H(t,x,\lambda,\lambda_0,u) = \lambda . u + \lambda_0 (u^2 + x).$$

D'après le principe du maximum de Pontryaguine Théorème 3.4. si u^* est le contrôle optimal et x^* est la trajectoire optimale associée, alors

$\boxed{3.34^\circ}$

il existe une application $\lambda : [0,4] \to \mathbb{R}$ et un réel $\lambda_0 \in \{0,1\}$ tels que

i) $(\lambda, \lambda_0) \neq (0,0)$,

ii) $$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = u^*(t), \quad t \in [0,4], \\ x^*(0) = 0, \; x^*(4) = 1 \\ \dot{\lambda}(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -\lambda_0 \;, \quad t \in [0,4]. \end{cases}$$

iii) $\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0$ car il n'y a pas de contraintes sur le contrôle.

c'st-à-dire

$\lambda + 2\lambda_0 u^* = 0.$ (Il suffit de calculer $\frac{\partial H}{\partial u}$).

D'aprè cette dernière équation si $\lambda_0 = 0$, alors $\lambda = 0$ ce qui est impossible d'aprè i).
Par suite $\lambda_0 = 1$ et l'extrémale est normale.

$\boxed{3.35°}$

Maintenant d'après iii), on a

$$u^*(t) = -\frac{\lambda(t)}{2} \qquad (a1) \qquad \begin{pmatrix} \text{vu que} \\ \lambda_0 = 1 \end{pmatrix}$$

D'autre part d'après ii), on a:

$$\dot{\lambda}(t) = -1, \quad t \in [0,4].$$

Ce qui donne

$$\lambda(t) = -t + \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

et par conséquent d'après (a1), on a:

$$\boxed{u^*(t) = \frac{t}{2} + \frac{\alpha}{2}.} \qquad (a2)$$

Maintenant d'après i), on a:

$$\dot{x}^*(t) = u^*(t), \quad t \in [0,4].$$

C'est-à-dire, $\quad \dot{x}^*(t) = \frac{t}{2} + \frac{\alpha}{2}, \quad t \in [0,4]$

$\boxed{3.36°}$

Ce qui donne,

$$x^*(t) = \frac{t^2}{4} + \frac{\alpha}{2} t + \beta, \quad t \in [0,4],$$

avec $\beta \in \mathbb{R}$.

Déterminons α et β. Pour cela on utilise les conditions aux limites $x^*(0) = 0$ et $x^*(4) = 1$.

La condition $x^*(0) = 0$ donne $\beta = 0$, et la condition $x^*(4) = 1$ donne

$$\frac{16}{4} + 2\alpha = 1,$$

c'est-à-dire, $\quad \alpha = -\frac{3}{2}.$

En conclusion,

$$\boxed{x^*(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{3}{4} t}, \quad t \in [0,4],$$

et

$$\boxed{u^*(t) = \frac{t}{2} - \frac{3}{4}}, \quad t \in [0,4]$$

3.37°

Exemple 2 : On considère le problème de contrôle optimal suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + u(t), \\ x(0) = 1, \ x(1) = 0 \\ \min\limits_{u \in \mathbb{R}} \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(t)\,dt. \end{cases}$$

Déterminer le contrôle optimal et la trajectoire optimale.

Solution : On définit le Hamiltonien H par

$$H(t, x, \lambda, \lambda_0, u) = \lambda.(x+u) + \frac{\lambda_0}{2} u^2$$

D'aprés le principe du maximum de Pontryaguine Théorème 3.4. si u^* est le contrôle optimal et x^* est la trajectoire optimale associée, alors il existe une application $\lambda : [0,1] \to \mathbb{R}$ et un réel $\lambda_0 \in \{0,1\}$ tels que

i) $(\lambda, \lambda_0) \neq (0,0)$,

ii) $$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = x^*(t) + u^*(t), \quad t \in [0,1] \\ x^*(0) = 1, \ x^*(1) = 0, \\ \dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda(t), \ t \in [0,1] \end{cases}$$

$$\boxed{3.38^\circ}$$

iii)

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow \lambda(t) + \lambda_0 u^*(t) = 0, \quad t \in [0,1].$$

D'après cette dernière condition si $\lambda_0 = 0$, alors $\lambda(t) = 0$, $t \in [0,1]$

C'est-à-dire $\lambda = 0$ ce qui est impossible (voir i)).

Par suite $\lambda_0 = 1$ et l'extrémale est normale, et par conséquent d'après la condition iii), on a

$$u^*(t) = -\lambda(t), \quad t \in [0,1] \qquad \text{(b1)}$$

Maintenant d'après l'équation de l'état adjoint dans ii), on a:

$$\dot{\lambda}(t) = -\lambda(t), \quad t \in [0,1],$$

ce qui donne,

$$\lambda(t) = \alpha e^{-t}, \quad t \in [0,1],$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Par suite d'après (b1), on obtient

$$\boxed{u^*(t) = -\alpha e^{-t}} \qquad \text{(b2)}$$

Maintenant on va donner l'expression exacte de x^*.

D'après la condition ii) et (b2), on a

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = x^*(t) - \alpha e^{-t}, & t \in [0,1], \\ x^*(0) = 1, \ x^*(1) = 0. \end{cases}$$

On a,
$$\dot{x}^*(t) = x^*(t) - \alpha e^{-t}, \quad t \in [0,1].$$

C'st-à-dire,
$$\dot{x}^*(t) - x^*(t) = -\alpha e^{-t}, \quad t \in [0,1].$$

Multiplions les deux membres de l'équation précédente par e^{-t}, on obtient

$$e^{-t}\dot{x}^*(t) - e^{-t}x^*(t) = -\alpha e^{-2t}, \quad t \in [0,1]$$

C'st-à-dire,
$$\left(e^{-t}x^*(t)\right)' = -\alpha e^{-2t}$$

Ce qui donne, $e^{-t}x^*(t) = \frac{\alpha}{2}e^{-2t} + \beta$, avec $\beta \in \mathbb{R}$

C'est-à-dire,

$$x^*(t) = \frac{\alpha}{2} e^{-t} + \beta e^{t}$$

Maintenant les conditions $x^*(0) = 1$ et $x^*(1) = 0$ donnent

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{2} + \beta = 1, \\ \frac{\alpha}{2} e^{-1} + \beta e = 0. \end{cases}$$

Ce qui donne, $\alpha = 2 \frac{e^2}{e^2 - 1}$ et $\beta = \frac{1}{1 - e^2}$.

En conclusion la trajectoire optimale x^* et le contrôle optimal x^* et u^* sont données par

$$x^*(t) = \frac{e^{2-t} - e^{t}}{e^2 - 1}, \quad t \in [0, 1],$$

et

$$u^*(t) = \frac{2e^{2-t}}{1 - e^2}, \quad t \in [0, 1].$$

$\boxed{3.41^\circ}$

<u>Exemple 3</u> : On considère le problème de contrôle optimal suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), \ t \in [0,4], \\ x(0) = 0, \ x(4) = 1, \\ \min\limits_{u \in \mathbb{R}^+} \int_0^4 \left(u^2(t) + x(t)\right) dt. \end{cases}$$

Déterminer le contrôle optimal et la trajectoire optimale associée.

<u>Solution</u> : On définit le Hamiltonien H par

$$H(t, x, \lambda, \lambda_0, u) = \lambda . u + \lambda_0 . (u^2 + x).$$

D'après le principe du maximum de Pontryaguine Théorème 3.4 si u^* est le contrôle optimal et x^* est la trajectoire optimale associée, alors il existe une application $\lambda : [0,4] \to \mathbb{R}$ et un réel $\lambda_0 \in \{0,1\}$ tels que

i) $(\lambda, \lambda_0) \neq (0,0)$,

ii) $\begin{cases} \dot{x}^*(t) = u^*(t), & t \in [0,4], \\ x^*(0) = 0, \quad x^*(4) = 1, \\ \dot{\lambda}(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -\lambda_0, & t \in [0,4], \end{cases}$

iii) $H(t, x^*, \lambda, \lambda_0, u^*) = \min\limits_{v \in \mathbb{R}^+} H(t, x^*, \lambda, \lambda_0, v).$

C'st-à-dire,

$$\lambda u^* + \lambda_0 \left((u^*)^2 + x^* \right) = \min_{v \in \mathbb{R}^+} \left[\lambda v + \lambda_0 \cdot (v^2 + x^*) \right].$$

C'st-à-dire,

$$\lambda u^* + \lambda_0 (u^*)^2 = \min_{v \in \mathbb{R}^+} \left[\lambda v + \lambda_0 v^2 \right]$$

Si $\lambda_0 = 0$, on obtient

$$\lambda u^* = \min_{v \in \mathbb{R}^+} \lambda v$$

Ce qui donne

$u^* = 0$ à condition que $\lambda(t) > 0$, pour $t \in [0,4]$

Or $u^* = 0$ est impossible car d'après l'équation de l'état avec les conditions aux limites (voir ii)), on a

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = 0, \\ x^*(0) = 0, \ x^*(4) = 1, \end{cases}$$

et ce problème n'admet aucune solution.

Par suite $\lambda_0 = 1$ et l'extrémale est normale et

on a

$$\lambda u^* + (u^*)^2 = \min_{v \in \mathbb{R}^+} (\lambda v + v^2). \qquad \boxed{C1}$$

D'après l'équation de l'état adjoint dans ii) et sachant que $\lambda_0 = 1$, on a

$$\dot{\lambda}(t) = -1, \quad t \in [0,4].$$

Ce qui donne,

$$\lambda(t) = -t + k, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

Alors d'après $\boxed{C1}$ pour déterminer u^*, on distingue les cas suivants :

<u>Cas 1</u> : $\lambda(t) > 0$, pour tout $t \in [0,4]$.

Pour ce cas, d'aprés $\boxed{C1}$, on a $u^* = 0$.
Mais si $u^* = 0$, alors d'apré l'équation de l'état adjoint et les conditions aux limites, on obtient une contradiction.

<u>Cas 2</u> : $\lambda(t) < 0$, pour tout $t \in [0,4]$

On a,
$$\lambda u^* + (u^*)^2 = \min_{v \in \mathbb{R}^+} (\lambda v + v^2)$$

On pose,
$$h(v) = \lambda v + v^2, \quad v \in \mathbb{R}^+$$

Alors,
$$h'(v) = \lambda + 2v,$$

v	0		v^*		$+\infty$
$h'(v)$		$-$	0	$+$	
$h(v)$	0	$\searrow$	$h(v^*)$	$\nearrow$	$+\infty$

avec
$$v^* = -\frac{\lambda}{2}.$$

$\boxed{3.45^\circ}$

Pour ce cas,

$$u^*(t) = -\frac{\lambda(t)}{2}, \quad t \in [0,4]$$

$$= \frac{t-k}{2}.$$

Comme,

$$\begin{cases} x^*(t) = u^*(t), & t \in [0,4], \\ x^*(0) = 0, \ x^*(4) = 1. \end{cases}$$

Alors, $x^*(t) = \frac{t^2}{4} - \frac{kt}{2} + \alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

La condition $x^*(0) = 0$ entraîne que $\alpha = 0$.

Maintenant

$$x^*(4) = 1 \iff \frac{16}{4} - \frac{k.4}{2} = 1$$

$$\iff 4 - 2k = 1$$

$$\iff k = \frac{3}{2}.$$

Mais pour ce cas $\lambda(t) = -t + k < 0$, pour tout $t \in [0,4]$, c'st-à-dire $k < t$, pour tout $t \in [0,4]$, ce qui st en contradiction avec $k = \frac{3}{2}$.

$\boxed{3.46^\circ}$

<u>Cas 3</u>: $\lambda(t) > 0$, pour tout $t \in [0, t_1[$ et $\lambda(t) < 0$, pour tout $t \in]t_1, 4]$, avec $t_1 \in]0, 4[$.

Pour ce cas, on a

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in [0, t_1[, \\ \frac{t - k}{2} \text{ si } t \in [t_1, 4], \end{cases}$$

avec t_1 est tel que $\lambda(t_1) = 0$, c'est-à-dire, $-t_1 + k = 0$, c'est-à-dire, $t_1 = k$.

Maintenant comme,

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = u^*(t), \ t \in [0, 4], \\ x^*(0) = 0, \ x^*(4) = 1. \end{cases}$$

Alors,

$$x^*(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in [0, k[, \\ \frac{t^2}{4} - \frac{k}{2} t + \beta, \ t \in [k, 4], \end{cases}$$

avec $\beta \in \mathbb{R}$.

Déterminons k et β.

$$x^*(k) = 0, \quad \text{car } x^* \text{ est continue.}$$

C'est-à-dire,

$$\frac{k^2}{4} - \frac{k^2}{2} + \beta = 0.$$

C'est-à-dire, $$\beta = \frac{k^2}{4}. \qquad \boxed{C2}$$

Maintenant, on a

$$x^*(4) = 1.$$

C'est-à-dire,

$$4 - 2k + \beta = 1$$

C'est-à-dire,

$$\beta = -3 + 2k,$$

or d'après $\boxed{C2}$, on obtient

$$\frac{k^2}{4} = -3 + 2k.$$

C'est-à-dire, $$k^2 - 8k + 12 = 0. \qquad \boxed{C3}$$

$\boxed{3.48°}$

On a,

$$\Delta' = 16 - 12 = 4.$$

Alors les solutions de $\boxed{C3}$ sont

$$k_1 = \frac{4-\sqrt{\Delta'}}{1} = \frac{4-2}{1} = 2,$$

et

$$k_2 = \frac{4+\sqrt{\Delta'}}{1} = \frac{4+2}{1} = 6$$

La solution k_2 est refusée car $k_2 = 6 \notin [0,4]$.

Par suite,

$$k = 2,$$

et d'aprés $\boxed{C2}$, on a $\beta = 1$.

En conclusion le contrôle optimal u^* est

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in [0,2[, \\ \frac{t-2}{2} \text{ si } t \in [2,4], \end{cases}$$

et la trajectoire optimale x^* est:

$$x^*(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in [0,2[, \\ \frac{t^2}{4} - t + 1, \text{ si } t \in [2,4]. \end{cases}$$

$\boxed{3.4.9°}$

<u>Exemple 4</u> : On considère le problème de contrôle optimal suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + u(t), \ t \in [0,4], \\ x(0) = 0, \ \ x(4) = \frac{3e^4}{2}, \\ \max\limits_{u \in [0,2]} \int_0^4 3x(t)\,dt. \end{cases}$$

<u>Solution</u> : Le problème de contrôle optimal est équivalent au problème de contrôle optimal suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t) + u(t), \ t \in [0,4], \\ x(0) = 0, \ x(4) = \frac{3e^4}{2}, \\ \min\limits_{u \in [0,2]} -\int_0^4 3x(t)\,dt. \end{cases}$$

On définit le Hamiltonien H par

$$H(t, x, \lambda, \lambda_0, u) = \lambda.(x + u) - 3\lambda_0 x.$$

D'après le principe du maximum de Pontryaguine Théorème 3.4 si u^* est le contrôle optimal et x^* est la trajectoire optimale associée, alors il existe

$\boxed{3.50°}$

une application $\lambda : [0,4] \to \mathbb{R}$ et un réel $\lambda_0 \in \{0,1\}$ tels que

i) $(\lambda, \lambda_0) \neq (0,0)$,

ii) $$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = x^*(t) + u^*(t), \; t \in [0,4], \\ x^*(0) = 0, \quad x^*(4) = \frac{3e^4}{2}, \\ \dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\lambda(t) + 3\lambda_0, \; t \in [0,4]. \end{cases}$$

iii) $$H(t, x^*, \lambda, \lambda_0, u^*) = \min_{v \in [0,2]} H(t, x^*, \lambda, \lambda_0, v)$$

C'st-à-dire,

$$\lambda.(x^* + u^*) - 3\lambda_0 x^* = \min_{v \in [0,2]} \left[\lambda.(x^* + v) - 3\lambda_0 x^*\right].$$

C'st-à-dire,

$$\lambda.u^* = \min_{v \in [0,2]} [\lambda . v].$$

C'st-à-dire

$$u^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda(t) > 0, \\ 2 & \text{si } \lambda(t) < 0, \\ ? & \text{si } \lambda(t) = 0. \end{cases}$$

D'aprè l'équation de l'état adjoint dans ii), on a

$$\dot{\lambda}(t) = -\lambda(t) + 3\lambda_0, \quad t \in [0,4]$$

Ce qui donne

$$\lambda(t) = \alpha e^{-t} + 3\lambda_0, \quad t \in [0,4], \qquad \boxed{D1}$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Supposons que $\lambda_0 = 0$, alors on a

$$\lambda(t) = \alpha e^{-t}, \quad t \in [0,4].$$

Ce qui entraîne que $\lambda(t) > 0$, pour tout $t \in [0,4]$ si $\alpha > 0$ et $\lambda(t) < 0$, pour tout $t \in [0,4]$, si $\alpha < 0$.

$\boxed{3.52^\circ}$

Cas 1 : $\alpha > 0$.

Pour ce cas $\lambda(t) > 0$, pour tout $t \in [0,4]$.

Ce qui entraîne que $u^*(t) = 0$, pour tout $t \in [0,4]$.

Par suite d'après ii), on a

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = x^*(t), & t \in [0,4] \\ x^*(0) = 0, & x^*(4) = \frac{3e^4}{2}. \end{cases}$$

Or le problème ci-dessus n'admet aucune solution.

Cas 2 : $\alpha < 0$.

Pour ce cas $\lambda(t) < 0$, pour tout $t \in [0,4]$.

Ce qui entraîne que $u^*(t) = 2$, pour tout $t \in [0,4]$.

Par suite d'après ii), on a

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = x^*(t) + 2, & t \in [0,4] \\ x^*(0) = 0, & x^*(4) = \frac{3e^4}{2}. \end{cases}$$

Les solutions de l'équation

$$\dot{x}^*(t) = x^*(t) + 2, \quad t \in [0,4],$$

sont données par

$$x^*(t) = a e^t - 2, \quad t \in [0,4],$$

avec $a \in \mathbb{R}$.

Maintenant la condition $x^*(0) = 0$ entraîne que $a = 2$.

D'autre part la condition $x^*(4) = \frac{3e^4}{2}$ entraîne que

$$2e^4 - 2 = \frac{3e^4}{2}$$

C'est-à-dire, $\frac{e^4}{2} = 2$.

Ce qui est impossible

En conclusion on ne peut pas avoir $\lambda_0 = 0$ et par suite $\lambda_0 = 1$, c'est-à-dire, l'extrêmale est normale.

$\boxed{3.54°}$

Alors d'après ce qui précède et d'après $\boxed{D1}$, on a

$$\lambda(t) = \alpha e^{-t} + 3, \quad t \in [0,4].$$

On ne peut pas avoir $\lambda(t) > 0$, pour ~~tout~~ $t \in [0,4]$, ou $\lambda(t) < 0$, pour tout $t \in [0,4]$ (Il suffit de faire un raisonnement analogue à celui des Cas 1 et Cas 2 précédents).

Par suite on a nécessairement $\alpha < 0$, avec

$\lambda(0) = \alpha + 3 < 0$, $\lambda(4) = \alpha e^{-4} + 3 > 0$

et $t \mapsto \lambda(t)$ est strictement ~~décroi~~ croissante

t	0		$\ln\left(-\frac{\alpha}{3}\right)$		4
$\lambda'(t)$		$+$			
$\lambda(t)$	$\lambda(0) = \alpha + 3 < 0$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\lambda(4) = \alpha e^{-4} + 3 > 0$

$\boxed{3.55°}$

Par suite,

$$u^*(t) = \begin{cases} 2 \text{ si } t \in [0, \ln(-\frac{\alpha}{3})[, \\ 0 \text{ si } t \in [\ln(-\frac{\alpha}{3}), 4]. \end{cases}$$

Comme,

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = x^*(t) + u^*(t), \; t \in [0,4], \\ x^*(0) = 0, \; x^*(4) = \frac{3e^4}{2}. \end{cases}$$

Alors,

$$x^*(t) = \begin{cases} 2e^t - 2 \text{ si } t \in [0, \ln(-\frac{\alpha}{3})[, \\ \frac{3}{2}e^t \text{ si } t \in [\ln(-\frac{\alpha}{3}), 4]. \end{cases}$$

Comme x^* est continue, on a :

$$2e^{\ln(-\frac{\alpha}{3})} - 2 = \frac{3}{2}e^{\ln(-\frac{\alpha}{3})}$$

C'est-à-dire,

$$-\frac{2\alpha}{3} - 2 = -\frac{\alpha}{2}.$$

C'est-à-dire,

$$\frac{2\alpha}{3} - \frac{\alpha}{2} = -2.$$

Ce qui donne, $\boxed{\alpha = -12.}$

En conclusion le contrôle optimal u^* est:

$$u^*(t) = \begin{cases} 2 \text{ si } t \in [0, \ln 4[, \\ 0 \text{ si } t \in [\ln 4, 4], \end{cases}$$

et la trajectoire optimal x^* est donnée par

$$x^*(t) = \begin{cases} 2e^t - 2 \text{ si } t \in [0, \ln 4[, \\ \frac{3}{2}e^t \text{ si } t \in [\ln 4, 4]. \end{cases}$$

$\boxed{3{,}57^\circ}$

Exemple 5: Résoudre le problème de contrôle optimal suivant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), \ t \in [0, T], \\ x(0) = 5, \ \ x(T) = 0, \\ \min\limits_{u \in [-2,2]} \left(\frac{1}{2} \int_0^T (u^2(t) + 1) dt \right), \end{cases}$$

avec T libre.

Solution: On définit le Hamiltonien H par

$$H(t, x, \lambda, \lambda_0, u) = \lambda . u + \frac{\lambda_0}{2} (u^2 + 1).$$

D'aprés le principe du maximum de Pontryaguine Théorème 3.4 si u^* est le contrôle optimal et x^* est la trajectoire optimale associée, alors il existe une application $\lambda : [0, T] \to \mathbb{R}$ et un réel $\lambda_0 \in \{0, 1\}$ tels que

i) $(\lambda, \lambda_0) \neq (0, 0)$

ii)
$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = u^*(t), \ t \in [0,T], \\ x^*(0) = 5, \ x^*(T) = 0, \\ \dot{\lambda}(t) = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = 0, \ t \in [0,T], \end{cases}$$

iii)
$$H(t, x^*, \lambda, \lambda_0, u^*) = \min_{v \in [-2,2]} H(t, x^*, \lambda, \lambda_0, v).$$

C'est-à-dire,
$$\lambda . u^* + \frac{\lambda_0}{2}\left((u^*)^2 + 1\right) = \min_{v \in [-2,2]} \left[\lambda . v + \frac{\lambda_0}{2}(v^2 + 1)\right].$$

C'est-à-dire,
$$\lambda . u^* + \frac{\lambda_0}{2}(u^*)^2 = \min_{v \in [-2,2]} \left[\lambda . v + \frac{\lambda_0}{2} v^2\right].$$

iv)
$$H(T, x^*(T), \lambda, \lambda_0, u^*(T)) = 0.$$

C'est-à-dire,
$$\lambda . u^*(T) + \frac{\lambda_0}{2}\left((u^*(T))^2 + 1\right) = 0.$$

$\boxed{3.59°}$

Vérifions d'abord que l'extrémale est normale.

Supposons que $\lambda_0 = 0$, alors d'après la condition iii), on a

$$\lambda . u^* = \min_{v \in [-2,2]} \lambda . v$$

C'est-à-dire

$$u^*(t) = \begin{cases} +2 & \text{si } \lambda(t) < 0, \\ -2 & \text{si } \lambda(t) > 0. \end{cases}$$

<u>Cas 1</u> : $u^* = +2$

D'après ii), on a

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = 2, \quad t \in [0,T], \\ x^*(0) = 5, \quad x^*(T) = 0. \end{cases}$$

Il est clair que le problème ci-dessus n'admet aucune solution.

<u>Cas 2</u> : $u^* = -2$

3.60°

Pour ce cas, d'après la condition iv), on a

$$H(T, x^*(T), \lambda, 0, u^*(T)) = 0. \quad \left(\begin{array}{l}\text{voir que} \\ \lambda_0 = 0 \text{ par} \\ \text{hypothèse}\end{array}\right).$$

C'est-à-dire,

$$-2\lambda(T) = 0.$$

Ce qui donne $\lambda(T) = 0$ ce qui impossible d'après la condition i).

En conclusion l'extrémale est normale et par suite $\lambda_0 = 1$.

Maintenant on va déterminer le contrôle optimal, la trajectoire optimale x^* et le temps T.

D'après la condition iii), on a

$$\lambda u^* + \frac{1}{2}(u^*)^2 = \min_{v \in [-2,2]} \left[\lambda . v + \frac{1}{2} v^2\right],$$

et d'aprés la condition ii), on a :

$$\dot{\lambda}(t) = 0, \quad t \in [0, T].$$

C'est-à-dire,

$$\lambda(t) = \beta, \quad t \in [0, T],$$

avec $\beta \in \mathbb{R}$.

Alors, on a :

$$\beta u^* + \frac{1}{2}(u^*)^2 = \min_{v \in [-2,2]} \left[\beta . v + \frac{1}{2} v^2 \right].$$

On pose,
$$h(v) = \beta . v + \frac{1}{2} v^2, \quad v \in [-2, 2]$$

Alors,
$$h'(v) = \beta + v, \quad v \in [-2, 2].$$

On distingue les cas suivants :

Cas 1 : $\beta \geq 2$.

Pour ce cas, on a $h'(v) \geq 0$, $\forall v \in [-2, 2]$

et par suite $u^*(t) = -2$, pour tout $t \in [0, T]$.

$\boxed{3.62°}$

Or d'aprés la condition iv), on a

$$H(T, x^*(T), \lambda(T), 1, u^*(T)) = 0.$$

C'est-à-dire

$$-2\beta + \frac{1}{2}\left((-2)^2 + 1\right) = 0.$$

C'est-à-dire

$$-2\beta + \frac{5}{2} = 0.$$

C'est-à-dire $$\beta = \frac{5}{4}$$

Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $\beta \geq 2$.

<u>Cas 2</u> : $\beta \leq -2$.

Pour ce cas, on a $h'(v) \leq 0$, $\forall\, v \in [-2, 2]$, et par suite $u^*(t) = 2$, pour tout $t \in [0, T]$.

Or d'aprés la condition iv), on a

$$H(T, x^*(T), \lambda(T), 1, u^*(T)) = 0.$$

C'est-à-dire $$2\beta + \frac{1}{2}\left((2)^2 + 1\right) = 0.$$

C'est-à-dire

$$2\beta + \frac{5}{2} = 0.$$

Ce qui donne $\beta = -\frac{5}{4}$

Ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $\beta \leq -2$.

<u>Cas 3</u> : $\beta \in]-2, 2[$

Pour ce cas, on a

$$\begin{aligned} h'(v) = 0 &\Leftrightarrow \beta + v = 0 \\ &\Leftrightarrow v = -\beta \end{aligned}$$

Alors, on a le tableau de variations suivant

v	-2		$-\beta$		2
$h'(v)$		$-$	0	$+$	
$h(v)$	$h(-2)$	$\searrow$	$h(-\beta)$	$\nearrow$	$h(2)$

D'après ce tableau de variations, on a

$$u^*(t) = -\beta, \quad \forall t \in [0, T].$$

$\boxed{3.6\,4^\circ}$

Par suite d'aprés l'équation de l'état dans la condition ii) avec les conditions aux limites on a

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = -\beta, \ t \in [0, T] \\ x^*(0) = 5, \ x^*(T) = 0. \end{cases}$$

Ce qui entraîne que

$$x^*(t) = -\beta t + 5,$$

avec $\beta > 0$ et $T = \frac{5}{\beta}$ (voir que $x^*(T) = 0$).

Maintenant d'aprés la condition iv), on a

$$H(T, x^*(T), \lambda(T), 1, u^*(T)) = 0.$$

C'est-à-dire

$$\lambda(T)\, u^*(T) + \frac{1}{2}\left((u^*(T))^2 + 1\right) = 0.$$

C'est-à-dire

$$-\beta^2 + \frac{1}{2}\left((-\beta)^2 + 1\right) = 0.$$

C'est-à-dire, $-\frac{1}{2}\beta^2 + \frac{1}{2} = 0.$

$\boxed{3.65°}$

Ce qui donne

$$\beta = 1.$$

En conclusion le contrôle optimal est

$$u^*(t) = -1, \ \forall t \in [0,5] \ \begin{pmatrix} \text{Voir que} \\ T = \frac{5}{\beta} = 5 \end{pmatrix},$$

et la trajectoire optimal est

$$x^*(t) = -t + 5, \ \forall t \in [0,5].$$

<u>Exemple 6</u> : On considère le problème de contrôle optimal suivant

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \\ X(0) = X_0, \ X(T) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \min\limits_{u \in \mathbb{R}} \frac{1}{2} \int_0^T u^2(t)\,dt, \end{cases}$$

avec T fixé et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

On définit le Hamiltonien H par

$$H(t, X, \lambda, \lambda_0, u) = \lambda_1 x_2 + \lambda_2 u + \frac{\lambda_0}{2} u^2,$$

avec $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$.

D'après le principe du maximum de Pontryagine Théorème 3.4 si u^* est le contrôle optimal et X^* est la trajectoire optimale associée, alors il existe une application $\lambda : [0, T] \to \mathbb{R}^2$ et un réel $\lambda_0 \in \{0, 1\}$ tels que

i) $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_0) \neq (0, 0, 0)$,

ii)
$$\begin{cases} \dot{x}_1^*(t) = x_2^*(t), \; t \in [0, T], \\ \dot{x}_2^*(t) = u^*(t), \; t \in [0, T], \\ X^*(0) = X_0, \; X^*(T) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \dot{\lambda}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \; t \in [0, T], \\ \dot{\lambda}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1(t), \; t \in [0, T], \end{cases}$$

avec $X^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}$.

$\boxed{3.67^\circ}$

iii) $$\frac{\partial H}{\partial u} = 0.$$

C'st_à_dire,

$$\lambda_2 + \lambda_0 u^* = 0. \qquad \boxed{E1}.$$

Montrons d'abord que toute extrémale est normale.

Supposons que $\lambda_0 = 0$, alors d'après $\boxed{E1}$, on a

$\lambda_2 = 0$

Ce qui entraine d'après la condition ii), on a

$$0 = -\lambda_1(t), \ \forall t \in [0,T]. \quad \left(\begin{array}{c}\text{Voir que} \\ \lambda_2(t) = -\lambda_1(t)\end{array}\right)$$

C'st_à_dire,

$$\lambda_1 = 0.$$

Par suite, on a $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_0) = (0, 0, 0)$ ce qui est en contradiction avec la condition i).

En conclusion toute extrémale est normale et par conséquent $\lambda_0 = 1$.

$\boxed{3.68°}$

Maintenant on va déterminer le contrôle optimal u^* et la trajectoire optimale X^*.

D'après $\boxed{E1}$, on a

$$u^*(t) = -\lambda_2(t), \quad t \in [0,T] \qquad \boxed{E2}$$

Mais d'après la condition ii), on a

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1(t) = 0, & t \in [0,T], \\ \dot{\lambda}_2(t) = -\lambda_1(t), & t \in [0,T]. \end{cases}$$

Ce qui entraine que

$$\lambda_1(t) = \alpha, \quad t \in [0,T],$$

et

$$\lambda_2(t) = -\alpha t + \beta, \quad t \in [0,T],$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Par suite d'après $\boxed{E2}$, on a

$$u^*(t) = \alpha t - \beta, \quad t \in [0,T].$$

Ce qui donne d'aprés l'équation de l'état adjoint dans la condition ii) que

$$\begin{cases} \dot{x}_1^*(t) = x_2^*(t), & t \in [0,T], \\ \dot{x}_2^*(t) = \alpha t - \beta, & t \in [0,T] \\ X^*(0) = X_0, & X^*(T) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Si on pose $X_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$, on obtient

$$x_2^*(t) = \frac{\alpha}{2} t^2 - \beta t + x_2^0, \quad t \in [0,T],$$

et $$x_1^*(t) = \frac{\alpha t^3}{6} - \frac{\beta}{2} t^2 + x_2^0 t + x_1^0, \quad t \in [0,T].$$

Pour déterminer α et β il faut utiliser la condition $X^*(T) = 0$, ce qui donne le système algébrique

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{2} T^2 - \beta T + x_2^0 = 0, \\ \frac{\alpha}{6} T^3 - \frac{\beta}{2} T^2 + x_2^0 T + x_1^0 = 0 \end{cases}$$

$\boxed{3.70°}$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} \frac{T^2}{2}\alpha - T.\beta = -x_2^0 \\ \frac{T^3}{6}\alpha - \frac{T^2}{2}\beta = -x_1^0 - x_2^0 T \end{cases}$$

Un calcul simple montre que

$$\alpha = \frac{6}{T^3}\left(2x_1^0 + x_2^0 T\right),$$

et

$$\beta = \frac{2}{T^2}\left(3x_1^0 + 2x_2^0 T\right).$$

En conclusion le contrôle optimal u^* est

$$u^*(t) = -\frac{6}{T^3}\left(2x_1^0 + x_2^0 T\right)t + \frac{2}{T^2}\left(3x_1^0 + 2x_2^0 T\right),$$

et la trajectoire optimale $X^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}$ est donnée par

$$X^*(t) = \begin{pmatrix} \frac{\left(2x_1^0 + x_2^0 T\right)}{T^3}t^3 - \frac{\left(3x_1^0 + 2x_2^0 T\right)}{T^2}t^2 + x_2^0 t + x_1^0 \\ \frac{3}{T^3}\left(2x_1^0 + x_2^0 T\right)t^2 - \frac{2}{T^2}\left(3x_1^0 + 2x_2^0 T\right)t + x_2^0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{3.71°}$