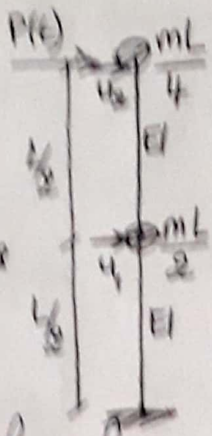
DDS2 - Serie de TD 2

Exercice 1

1 - Calcul des modes propres de vibration



Pour calculer les modes propres de vibration ϕ_i il faut d'abord calculer les pulsations propres ω_i $i = 1$ a 2

- Calcul des pulsations propres :

les pulsations propres sont la solution de :

$$\det\left[K - \omega^2 M\right] = 0 \quad (1)$$

à partir de la serie de TD1 exercice 4 on a :

$$K = \frac{48EI}{7L^3}\begin{bmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M = \frac{mL}{4}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pour simplification on pose $\omega^2 = \lambda$ $C_K = \frac{48EI}{7L^3}$

$C_M = \frac{mL}{4}$. $K' = \begin{bmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$, $M' = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$(1) \Rightarrow \det\left[C_K K' - \lambda C_M M'\right] = 0$$

$$\Rightarrow \det\left[K' - \frac{C_M}{C_K}\lambda M'\right] = 0$$

on pose $\lambda' = \frac{C_M}{C_K}\lambda$

$$\Rightarrow \det\left[K' - \lambda' M'\right] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 16 - 2\lambda' & -5 \\ -5 & 2 - \lambda' \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (16 - 2\lambda')(2 - \lambda') - 25 = 0$$

$$\Rightarrow 2\lambda'^2 - 20\lambda' + 7 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda'_1 = 0.3632 \\ \lambda'_2 = 9,6363 \end{cases}$$

(numerotation de la plus petit à la plus grande)

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{C_K}{C_M}\lambda'_1 = 9.96\,\frac{EI}{mL^4} \\ \lambda_2 = 264.309\,\frac{EI}{mL^4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\lambda_1} = \frac{3.156}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} \\ \omega_2 = \sqrt{\lambda_2} = \frac{16.257}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{m}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 34.82 \text{ rad/s} \\ \omega_2 = 179.65 \text{ rads} \end{cases}$$

les pulsations propres de vibration du système à 2DDL.

Remarque : il est possible de calculer λ directement à partir de $|K - \lambda M| = 0$. On a introduit λ', C_K, C_M, M', K' pour simplification le Calcul des modes propres ϕ_i se fait par la relation suivante

$$(K - \alpha_i M)\phi_i = 0$$

ou plus simplement par

$$(K' - \alpha_i' M)\phi_i = 0 \quad \cdots (2)$$

système à 2DDL Donc on a deux modes propres :

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix}$$

mode 1 $\quad \alpha_1' = 0.3632$

$$(2) \Rightarrow \begin{pmatrix} 16 - 2\alpha_1' & -5 \\ -5 & 2-\alpha_1' \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

système de deux équations qui pocède une infinité de solutions:

on pose $\phi_{11} = 1$

on a $(16 - 2\alpha_1')\phi_{11} - 5\phi_{21} = 0$

$$\Rightarrow \phi_{21} = \frac{16 - 2 \times 0.3632}{5} = 3.05$$

Donc $\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3.05 \end{pmatrix}$

mode 2 : $\alpha_2' = 9.6363$

$$\begin{pmatrix} 16 - 2\alpha_2' & -5 \\ -5 & 2-\alpha_2' \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

On pose $\phi_{12} = 1$

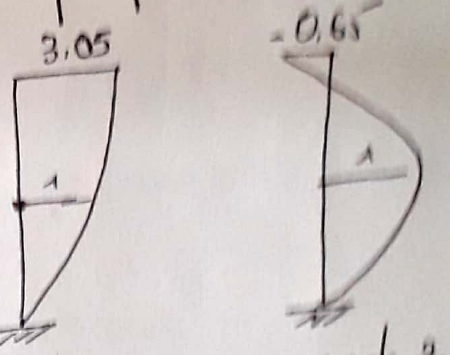
$$\phi_{22} = \frac{16 - 2 \times 9.6363}{5} = -0.65$$

$$\phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.65 \end{Bmatrix}$$

Donc la matrice modale est :

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3.05 & -0.65 \end{bmatrix}$$

représentation graphique des modes propres :



mode 1 $\qquad$ mode 2

les modes de vibration sont des formes de vibration du système étudié.

- le mode 1 vibre avec une pulsation ω_1 et une période $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$
- le mode 2 vibre avec une pulsation ω_2 et une période $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$

- demonstration que les modes propres verifient la propriété d'orthogonalité

Il faut que : $\phi_i^T K' \phi_j = 0$ et $\phi_i^T M' \phi_j = 0$

$$\phi_1^T M' \phi_2 = (1 \quad 3.05)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -0.65 \end{pmatrix}$$

$$= (2 \quad 3.05)\begin{pmatrix} 1 \\ -0.65 \end{pmatrix}\frac{mL}{4}$$

$$= 0.0175 \simeq 0$$

$$\phi_1^T K' \phi_2 = (1 \quad 3.05)\begin{bmatrix} 16 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -0.65 \end{pmatrix}$$

$$= (0.75 + 1.1)\begin{pmatrix} 1 \\ -0.65 \end{pmatrix}$$

$$= 0.035 \simeq 0$$

la propriété d'orthogonalité est donc verifiée.

2/ Calcul des deplacements dus à $P(t)$

$$P(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ P_0 \end{pmatrix}$$

on utilise la méthode de superposition modale.

$$u(t) = \sum_{i=1}^{2} u^{(i)}(t)$$

$$u^{(1)} = \phi_1 q_1(t), \quad u^{(2)} = \phi_2 q_2(t)$$

avec $q_1(t)$, $q_2(t)$ sont les solutions des equations diffentielles

$$\begin{cases} \text{mode 1} & \ddot{q}_1(t) + \omega_1^2 q_1(t) = \dfrac{P_1^*(t)}{M_1^*} \\ \text{mode 2} & \ddot{q}_2(t) + \omega_2^2 q_2(t) = \dfrac{P_2^*(t)}{M_2^*} \end{cases} \quad (3)$$

- Calcule de M_1^* et M_2^*

$$M_1^* = \phi_1^T M \phi_1$$

$$M_1^* = (1 \quad 3.05)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{mL}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 3.05 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{mL}{4}\left[2 + 3.05^2\right]$$

$$= \frac{8.4}{4} \times 11.30 = 90.42\,t$$

$$M_2^* = (1 \quad -0.65)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{mL}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -0.65 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{mL}{4}\left(2 + 0.65^2\right) = 19.38\,t$$

$$P_1^* = \phi_1^T P(t)$$

$$= (1 \quad 3.05)\begin{Bmatrix} 0 \\ P_0 \end{Bmatrix} = 3.05\,P_0$$

$$P_2^* = \phi_2^T P(t)$$

$$= (1 \quad -0.65)\begin{Bmatrix} 0 \\ P_0 \end{Bmatrix} = -0.65\,P_0$$

$$(3) \Rightarrow \begin{cases} \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = \dfrac{3.05\,P_0}{90.42} \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = -\dfrac{0.65\,P_0}{19.38} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = 0.033\,P_0 \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = -0.033\,P_0 \end{cases}$$

q_1 la solution de l'eq differentielle

$$\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = 0.033\,P_0$$

On utilise ce que nous avons vu dans la solution des SSDDL

$q_1 = q_{1h} + q_{1p}$

$q_{1h} = A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t$

$q_{1p} = \frac{0{,}033 P_0}{\omega_1^2}$

$q_1 = A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t + \frac{0{,}033 P_0}{\omega_1^2}$

C.I $= 0 \Rightarrow q_1(0) = 0 \quad q_1'(0) = 0$

$q_1(0) = 0 \Rightarrow A_1 + \frac{0{,}033 P_0}{\omega_1^2} = 0$

$A_1 = \frac{-0{,}033 P_0}{\omega_1^2}$

$A_1 = \frac{-0{,}033 \times 65}{(34.82)^2} = -0{,}00177 \text{ m}$

$q_1'(0) = 0 \Rightarrow -A_1 \omega_1 \sin \omega_1 0 + B_1 \omega_1 \cos \omega_1 0 = 0$

$\Rightarrow B_1 = 0$

$q_1 = -0.00177 \cos 34{,}82 t + 0{,}00177$

$q_1 = 0.00177(1 - \cos 34.82 t)$

$q_2(t)$ est la solution de l'éq diff

$\ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = -0{,}033 P_0$

$q_2 = A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \sin \omega_2 t - \frac{0{,}033 P_0}{\omega_2^2}$

$q_2(0) = 0 \Rightarrow A_2 = \frac{0{,}033 P_0}{\omega_2^2}$

$A_2 = 6{,}64 \times 10^{-5} \text{ m}$

$q_2'(0) = 0 \quad B_2 = 0$

$q_2(t) = 6.64.10^{-5} \cos \omega_2 t - 6{,}64.10^{-5}$

$= 6{,}64.10^{-5}(\cos 179.65 t - 1)$

$u^{(1)} = \phi_1 q_1$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3.05 \end{pmatrix} 0.00177(1 - \cos 34.82 t)$

$= \begin{pmatrix} 0.00177 \\ 0.0053 \end{pmatrix}(1 - \cos 34.82 t) \text{ m}$

$u^{(2)} = \phi_2 q_2$

$= \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}65 \end{pmatrix}(\cos 179.65 t - 1) 6.64.10^{-5}$

$= \begin{pmatrix} 6.64.10^{-5} \\ -4.316.10^{-5} \end{pmatrix}(\cos 179.65 t - 1) \text{ m}$

$u(t) = u^{(1)} + u^{(2)}$

$= \begin{pmatrix} 0.00177 \\ 0.0053 \end{pmatrix}(1 - \cos 34.82 t)$

$+ \begin{pmatrix} 6.64.10^{-5} \\ -4.316.10^{-5} \end{pmatrix}(\cos 179.65 t - 1) \text{ m}$

3/ Calcule des forces elastiques

$F_s = F_s^{(1)} + F_s^{(2)}$ (superposition modale)

$F_s^{(1)} = K u^{(1)} = K \phi_1 q_1 = \omega_1^2 M \phi_1 q_1$

$(K - \omega_1^2 M)\phi_1 = 0 \Rightarrow K\phi_1 = \omega_1^2 M \phi_1$

$F_s^{(1)} = (34.82)^2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \overset{m/4}{8} \begin{pmatrix} 1 \\ 3.05 \end{pmatrix} \times$

$0.00177(1 - \cos 34.82 t)$

$$F_s^{(1)} = (34.82)^2 \times 8 \begin{pmatrix}2\\3.05\end{pmatrix} . 0.00177(1-\cos\omega_1 t)$$

$$= \begin{pmatrix}34.33\\52.36\end{pmatrix}(1-\cos 34.82t)\ [kN]$$

$$F_s^{(2)} = \omega_2^2 M \phi_2 q_2$$

$$= (179.65)^2 \begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}\times 8 \begin{pmatrix}1\\-0.65\end{pmatrix}$$

$$\times 6.64\times 10^{-5}(\cos 179.65t - 1)$$

$$= (179.65)^2\times 8 \begin{pmatrix}2\\-0.65\end{pmatrix}.6.64.10^{-5}(\cos\omega_2 t-1)$$

$$= \begin{pmatrix}34.28\\-11.14\end{pmatrix}(\cos 179.65 - 1)$$

$$F_s = \begin{pmatrix}34.33\\52.36\end{pmatrix}(1-\cos 34.82t) +$$

$$\begin{pmatrix}34.28\\-11.14\end{pmatrix}(1-\cos 179.65t).$$

4/ Diagrammes des efforts internes

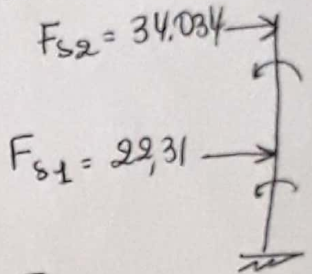
$$\text{à } t = T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{179.65} = 0.035s$$

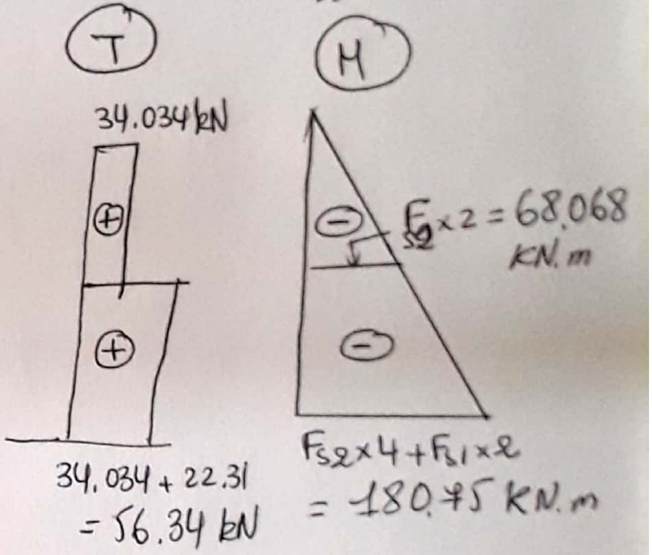
$$F_s = \begin{pmatrix}34.33\\52.36\end{pmatrix}(\underbrace{1-\cos 34.82 T_2}_{0.65})$$

$$+ \begin{pmatrix}34.28\\-11.14\end{pmatrix}(\underbrace{1-\cos \omega_2 \frac{2\pi}{\omega_2}}_{0})$$

$$F_s = \begin{pmatrix}22.31\\34.034\end{pmatrix} KN$$

On a donc le système sous les efforts suivants :





M et T à $t = T_2 = 0.035s$.