Mme BENYELLES WAFAA
(suite du cours MI)

Partie I
Espace de Probabilité

1 Algèbre des événements

1.1 L'expérience aléatoire

On appelle expérience aléatoire, toute expérience dont le résultat ne peut etre prédit avec certitude. L'ensemble des résultats possibles est par contre complètement déterminé à l'avance.

1.2 L'ensemble fondamental

On appelle ensemble fondamental ou espace échantillon ou ensemble référentiel ou espace des événements ou univers, l'ensemble Ω; associé à notre expérience aléatoire qui représente tous les résultats possibles de l'expérience en question.

Exemples

1. Soit l'expérience du jet d'un dé (on observera le nombre sur la face supérieure du dé) $\longrightarrow$ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
2. On compte le nombre de voitures qui traversent un pont dans une période donnée $\longrightarrow$ $\Omega = \{0, 1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}$
3. La durée de vie d'une lampe $\longrightarrow \Omega = [0, t[$
4. On jette deux pièces de monnaies $\longrightarrow \Omega = \{(p, p)\,,\ (p, f)\,,\ (f, p)\,,\ (f, f)\}$ $\quad p = pile,\ f = face$

1.3 L'algèbre des événements

1.3.1 L'événement : A,B,C

Soit Ω l'espace échantillon associé à une expériénce aléatoire. On appelle un "événement A" tout sous-ensemble de Ω

Soit A l'élément de la famille ₣, ₣ est la partition de Ω

$$\text{ie} \begin{cases} \text{₣} & \text{contient tous les singletons de } \Omega \\ \text{₣} & \text{contient l'espace échantillon } \Omega \\ \forall\ A \in \text{₣} & C_{\Omega}^{A} \in \text{₣} \\ \forall\ A,B \in \text{₣} & A \cup B \in \text{₣} \end{cases}$$

Exemple

Soit l'expérience du jet d'un dé où l'on observera le nombre sur la face supérieure du dé. Soit A l'événement "avoir un nombre pair".

Déterminer Ω et A.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ donc $A = \{2, 4, 6\}$

Remarques

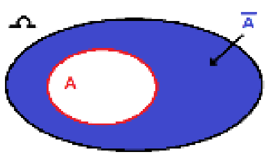
1. Ω est dit événement certain.
2. $\varnothing$ est dit événement impossible.
3. les singletons $\{\omega_i\}$, avec ω_i élément de Ω, sont dits événements élémentaires.
4. On dit qu'un événement A se réalise (à travers ω) si et seulement si le résultat de l'expérience appartient à A

$$\begin{aligned} A \;\; se\ réalise &\iff \omega \in A \\ A\ ne\ se\ réalise\ pas &\iff \omega \notin A \end{aligned}$$

5. tout événement A est une réunion d'événements élémentaires.

1.3.2 L'événement contraire: $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$

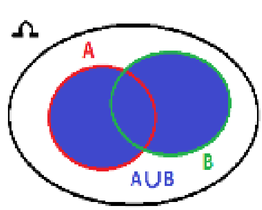
L'événement contraire $\overline{A}$ est défini par le complémentaire de A dans Ω ie $\overline{A} = C_\Omega^A$ de plus si



$\omega \in A \iff \omega \notin \overline{A}$

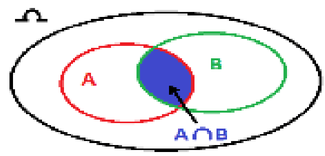
1.3.3 Opérations sur les événements

L'Union l'événement $A \cup B$ se réalise si et seulement si les événements A *ou* B se réalisent



$\omega \in A \cup B \iff \omega \in A \ ou\ \omega \in B$

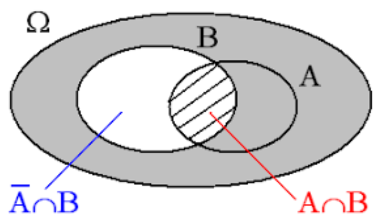
L'intersection l'événement $A \cap B$ se réalise si et seulement si les événements A *et* B se réalisent (en meme temps)



$$\omega \in A \cap B \iff \omega \in A \; et \; \omega \in B$$

La différence l'événement $B - A$ se réalise si et seulement si l'événement B se réalise sans A (tout seul)

$$\begin{aligned} \omega \quad \in \quad & B - A \iff \omega \in B \; et \; \omega \notin A \\ \iff \quad & \omega \in B \; et \; \omega \in \overline{A} \\ \iff \quad & \omega \in \; \overline{A} \cap B \end{aligned}$$



La difference symétrique l'événement $B \triangle A$ se réalise si et seulement si ou bien l'événement A se réalise ou bien l'événement B se réalise

$$\begin{aligned} \omega \quad & \in \quad B \triangle A \iff \omega \in B - A \;\; ou \; \omega \in A - B \\ B \triangle A \quad & = \quad (B - A) \cup (A - B) \end{aligned}$$

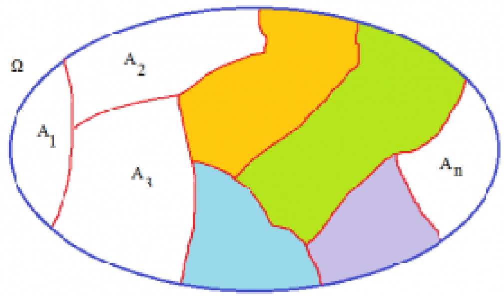
1.3.4 les événements incompatibles

On appelle des événements incompatibles ou disjoints ou mutuellement exclusifs si la réalisation de l'un exclut la réalisation de l'autre

$$A \; et \; B \; disjoints \iff A \cap B = \emptyset$$

1.3.5 Le système complet

On appelle un système complet de Ω, toutes partitions de Ω vérifiant les conditions suivantes:



Soient $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, des événements de Ω tels que:

$$\begin{cases} A_i \neq \emptyset & \forall i = 1, n \\ A_i \cap A_j = \emptyset & \forall i \neq j \\ \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega & \end{cases}$$

Remarque: $\left\{A\ ,\ \overline{A}\right\}$ forment un système complet de Ω

Exemple récapitulatif

On jette un dé et on observe le chiffre obtenu, on définit les événements suivants:

A "avoir un chiffre pair"
B "avoir un chiffre impair"
C "avoir un chiffre premier"

1. Déterminer l'espace échantillon Ω
2. Déterminer les événements suivants: $A,\ B,\ C,\ \overline{A},\ \overline{B},\ \overline{C},\ A \cap B,\ A \cap C,\ B \cap C,\ C - A,\ A - C,\ A - (C \cap B),\ A \triangle C$
3. Déterminer les événements qui forment un système complet.

Solution

1. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
2. $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{2, 3, 5\}$,
   $\overline{A} = \{1, 3, 5\} = B$, $\overline{B} = \{2, 4, 6\} = A$, $\overline{C} = \{1, 4, 6\}$,
   $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \{2\}$, $B \cap C = \{3, 5\}$,
   $C - A = \{3, 5\}$, (de C on ote les éléments de A) $A - C = \{4, 6\}$, $A - (C \cap B) = \{2, 4, 6\} - \{3, 5\} = \{2, 4, 6\} = A$
   $A \triangle C = (A - C) \cup (C - A) = \{3, 4, 5, 6\}$

2 Espace de probabilité

2.1 Définition d'une mesure de probabilité

On dit que P définit une mesure de probabilité ou tout simplement une probabilité sur l'espace Ω, si et seulement si (ssi) la fonction P vérifie les conditions suivantes:

$$P: \begin{array}{r} \text{Ŧ}(\Omega) \longrightarrow [0,1] \\ A \longmapsto P(A) \end{array} \quad \text{où } \text{Ŧ}(\Omega) \text{ est une partition de } \Omega \tag{1}$$

1. $P(\Omega) = 1$
2. $\forall A \in \text{Ŧ}(\Omega), \quad P(A) \succ 0$ (ou bien $0 \prec P(A) \prec 1$)
3. $\forall A, B \in \text{Ŧ}(\Omega)$, on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ssi $A \cap B = \emptyset$ ie A et B sont des événements incompatibles

3 bis. $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ ssi les événements $(A_i)_{i=1,n}$ sont disjoints deux à deux $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

2.2 Le modèle uniforme

On désigne par modèle uniforme (cas des événements équiprobables) tout espace de probabilité $(\Omega, \text{Ŧ}, P)$ tel que:

- Ω doit etre un ensemble fini ie $card\Omega = N$.
- Tous les événements élementaires $\{\omega_i\}$ ont la meme chance de se réaliser (sont équiprobables). Ainsi leurs probabilités est de 1/N (*ie* $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{N}$)

Soit A un événement de Ω , $A = \{\omega_1, \omega_2, ...\omega_k\} = \bigcup_{i=1}^{k} \{\omega_i\} \quad k \prec n$

on remarque, que:

$$\begin{aligned}
P(A) &= P(\{\omega_1, \omega_2, ...\omega_k\}) \\
&= P(\bigcup_{i=1}^{k} \{\omega_i\}) \\
&= \sum_{i=1}^{k} P(\{\omega_i\}) \ \ \textit{(en utilisant la propriètè 3.bis de (1))} \\
&= \frac{1}{N} + \frac{1}{N} + ... + \frac{1}{N} (k \ fois) \\
&= \frac{k}{N} \\
&= \frac{card \ A}{card \ \Omega} \\
&= \frac{nombre \ de \ cas \ favorable}{nombre \ de \ cas \ possible}
\end{aligned}$$

$cardA = nombre\ d'éléments\ de\ l'ensemble\ A$

2.3 Construction d'une mesure de probabilité

Proposition 1 *(cas discret) Soit l'espace de probabilité* $(\Omega, \text{Ғ}, P)$ *, P est une mesure de probabilité si et seulement si:*

$$\begin{cases} P(\{\omega_i\}) \geq 0 & \forall \omega_i \in \Omega \\ \sum_i P(\{\omega_i\}) = 1 \end{cases}$$

ainsi, pour tout évenement A, on aura $\forall A \in \text{Ғ}(\Omega), \quad A \neq \emptyset$,

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\{\omega_i\})$$

Proposition 2 *(cas continu) Soit l'espace de probabilité* $(\Omega, \text{Ғ}, P)$ *(ici* $\Omega = \mathbb{R}$ *et* $\text{Ғ} = B_{\mathbb{R}}$*), soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *tel que:*

$$\begin{cases} f(x) \succ 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ \int\limits_{\mathbb{R}} f(x) \ dx = 1 \end{cases}$$

ainsi, pour tout évenement A, on aura $\forall A \in \text{Ғ}(\Omega), \quad A \neq \emptyset$,

$$P(A) = \int\limits_A f(x) \ dx$$

P ainsi défini est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R} \ , \ B_{\mathbb{R}})$

2.4 Résultats et conséquences

Soit P une probabilité et A,B,C des événements de Ω, on a:

- $$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

  en effet: on a, $A \cup \overline{A} = \Omega$ et $A \cap \overline{A} = \emptyset$

  $$\begin{aligned} \text{on a} \quad : \quad & P(\Omega) = 1 \Longleftrightarrow P(A \cup \overline{A}) = 1 \text{ selon propriété 1 de(1)} \\ \Longleftrightarrow \quad & P(A) + P(\overline{A}) = 1 \text{ selon propriété 3 de (1)} \\ \Longleftrightarrow \quad & P(\overline{A}) = 1 - P(A) \end{aligned}$$

- $$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$$

  démonstration (à faire)
  remaque: $P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$
  Si $A \subset B$ alors $P(A - B) = P(A) - P(B)$

- $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

  démonstration (à faire)

- $$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

  démonstration (à faire en TD)

- $$A \subset B \Longrightarrow P(A) \leq P(B)$$

  démonstration (à faire)

- $$P(A \triangle B) = P(A) + P(B) - 2 \cdot P(A \cap B)$$

Exemple On reprend l'exemple récapitulatif précédent
On définit une probabilité P sur Ω

- Calculer les probabilités de tous les événements précédents

Solution
on est dans un cas uniforme donc

$$\text{Si E est un événement alors } P(E) = \frac{cardE}{card\Omega} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorable}{nombre\ de\ cas\ possible}$$

$P(A) = \frac{cardA}{card\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{cardB}{card\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$,
$P(C) = \frac{cardC}{card\Omega} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
$P(\overline{A}) = \frac{card\overline{A}}{card\Omega} = \frac{1}{2}$, $P(\ \overline{B}) = \frac{1}{2}$, $P(\ \overline{C}) = \frac{1}{2}$,
ou bien $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
$P(A \cap B) = 0$, $P(\ A \cap C) = \frac{card\ (A \cap C)}{card\ \Omega} = \frac{1}{6}$,
$P(\ B \cap C) = \frac{2}{6}$,
$P(C - A) = \frac{2}{6}$, $P(\ A - C) = \frac{2}{6}$,
$P(A - (C \cap B)) = P(A) = \frac{1}{2}$
ou bien $P(C - A) = P(C) - P(C \cap A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3-1}{6} = \frac{2}{6}$,
$P(A \triangle C) = \frac{card(A \triangle C)}{card\ \Omega} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$
ou bien $P(A \triangle C) = P\left[(A - C) \cup (C - A)\right] = P\left(A\right) + P\left(C\right) - 2 \cdot P(A \cap C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{6}$

3 Probabilité conditionnelle et indépendance

3.1 La probabilité conditionnelle (événements liés)

Definition 1 *Soient deux événements A et B (avec P(A) $\succ$ 0 et P(B) $\succ$ 0), il sera plus facile (quelques fois) de calculer la probabilité conditionnelle de A sachant B, notée $P(A/B)$ qui est définie par:*

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

de manière analogue: $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

EXEMPLE Soient deux urnes U_1et U_2 contenant chacune 3 boules rouges,3 boules blanches. On tire au hasard une boule de l'urne U_1et on l'a remet dans l'urne U_2, ensuite, on tire une boule de l'urne U_2, en notant a chaque fois la couleur

- Quelle est la probabilité que les deux boules tirées (de l'urne U_1et U_2) soient blanches.

  On définit, les événements suivants:

  A " la boule tirée de l'urne U_1 est blanche"

  B " la boule tirée de l'urne U_2 est blanche"

Solution .1 *notre problèmatique est de chercher la probabilité que les deux boules tirées (de l'urne* U_1 *<u>et</u>* U_2 *) soient blanches. en d'autres termes, on cherche P(A∩B)*

on a : $P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Longrightarrow P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A)$

$P(A) = \frac{card\ A}{card\ \Omega} = \frac{nombre\ de\ cas\ favorable}{nombre\ de\ cas\ possible} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(B/A) = \frac{nombre\ de\ cas\ favorable}{nombre\ de\ cas\ possible} = \frac{4}{7}$ *(comme on a ajouté, une boule blanche dans l'urne* U_2 *on aura ainsi un effectif de 7 boules au total et de 4 boules blanches)*

conclusion $P(A \cap B) = P(B/A) \cdot P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{2}{7} = 0.285$

3.2 Les événements indépendants

Definition 2 *Soit A et B deux événements de* Ω*, On dit que A et B sont des événements indépendants si et seulement si:*

$$\begin{aligned} P(A/B) &= P(A) \\ ou\ P(B/A) &= P(B) \\ ou\ P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B) \end{aligned}$$

Remarque Attention!, ne pas confondre "événements incompatibles, disjoints" et "événements indépendants"

Proposition 3 *Soient A et B deux événements , les propriétés suivantes, sont équivalentes:*

1. *A et B indépendants*
2. *A et* $\overline{B}$ *indépendants*
3. $\overline{A}$ *et B indépendants*
4. $\overline{A}$ *et* $\overline{B}$ *indépendants*

Remarque Pour démontrer l'équivalence, Il suffit de démontrer que 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3) $\Longrightarrow$ 4) $\Longrightarrow$ 1)

Preuve: on fera 1) $\Longrightarrow$ 2) (les autres seront proposées comme exercice en TD)

l'hypothèse 1) *ie* A et B indépendants$\Longleftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

problèmatique 2) *ie* A et $\overline{B}$ indépendants$\Longleftrightarrow P(A \cap \overline{B}) = P(A) \cdot P(\overline{B})$

$$\begin{aligned} P(A \cap \overline{B}) &= P(A - B) \\ &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A) \cdot P(B) \text{ (par hyp)} \\ &= P(A)\,[1 - P(B)] \\ &= P(A) \cdot P(\overline{B}) \quad \text{cqfd} \end{aligned}$$

$\blacksquare$

3.3 Formule des probabilités composées

Proposition 4 *Etant donné "n" événements,* $A_1, A_2, A_3, ...A_n$*, tels que* $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_{n-1}) \succ 0$ *alors on a:*

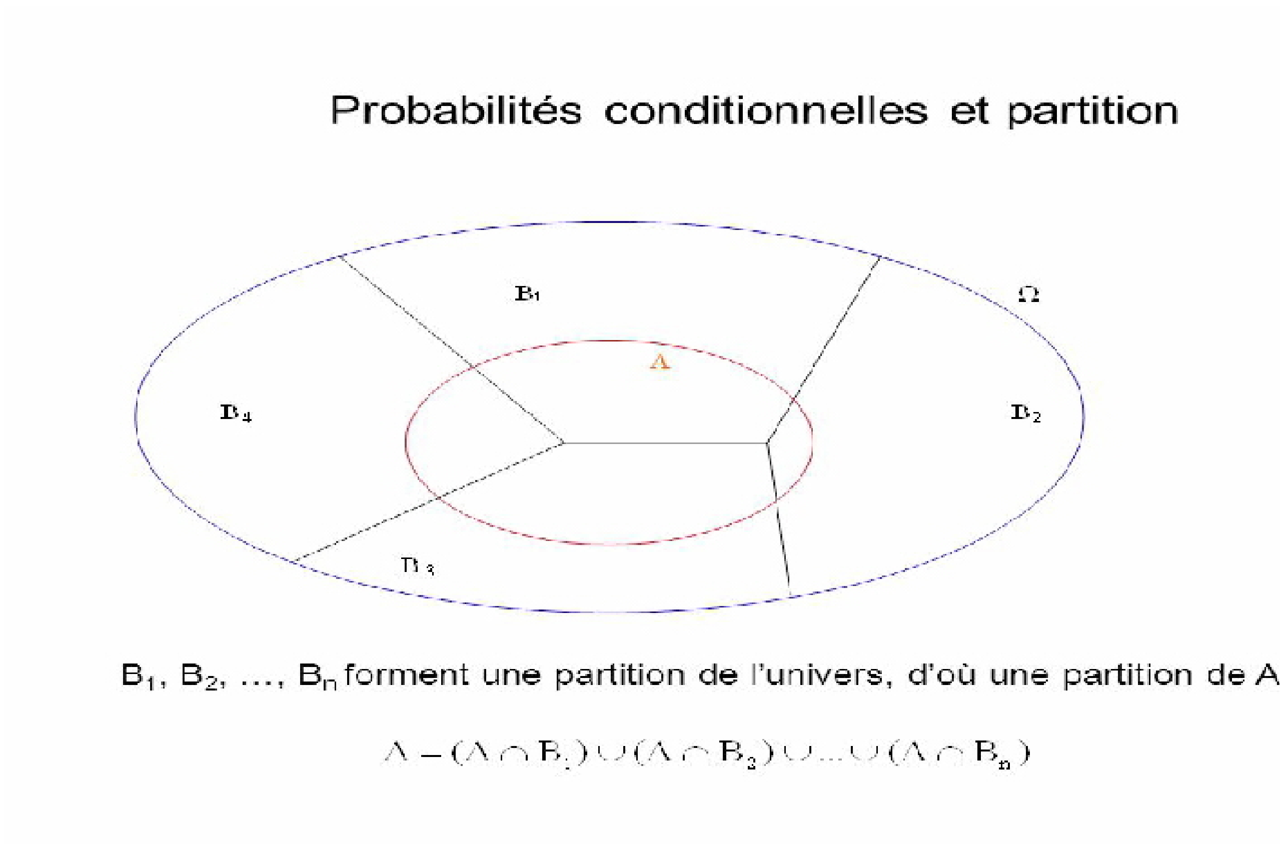
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdot ... \cdot P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_{n-1})$$

indication: on utilisera le raisonnement par récurrence pour la démonstration.

3.4 Formule des probabilités totales

Proposition 5 *Soit* $\{B_1, B_2, B_3, ...B_n\}$ *un système complet de* Ω *et* A *un événement quelconque de* Ω *, on a:*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i) \cdot P(B_i)$$



Preuve: $\{B_1, B_2, B_3, ...B_n\}$ un système complet de Ω ie $\begin{cases} B_i \cap B_j = \emptyset & \forall i \neq j \\ \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega & \end{cases}$ *ie*

$$\begin{aligned} A &= A \cap \Omega \\ &= A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} B_i) \\ &= (A \cap B_1) \cup ... \cup (A \cap B_n) \\ &= \bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i) \end{aligned}$$

P est une probabilité, ainsi:

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) \text{ en utilisant la propriètè 3.bis} \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A/B_i) \cdot P(B_i) \;\; \text{cqfd} \end{aligned}$$

■

3.5 Formule des probabiités des causes ou formule de Bayes

Proposition 6 *Soit $\{B_1, B_2, B_3, ...B_n\}$ un système complet de Ω et A un événement quelconque de Ω , on a:*

$$\begin{aligned} P(B_j/A) &= \frac{P(A/B_j) \cdot P(B_j)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A/B_j) \cdot P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A/B_i) \cdot P(B_i)} \end{aligned}$$

Example 1 *Dans une usine de pièces détachées; on a trois machines M1, M2,M3, qui produisent respectivement 20%,50%,30% de pièces*

La probabilité que la pièce soit défectueuse sachant qu'elle provient de la machine M1 est de 0.05

La probabilité que la pièce soit défectueuse sachant qu'elle provient de la machine M2 est de 0.02

La probabilité que la pièce soit défectueuse sachant qu'elle provient de la machine M3 est de 0.01

A l'usine , ils ont un contrôle de qualité, le contrôleur choisit au hasard une pièce.

1. *Quelle est la probabilité que la pièce, choisie par le contrôleur, soit défectueuse?*

2. *Quelle est la probabilité que la pièce provienne de la machine M1, sachant qu'elle est défectueuse?*

Soient les événements suivants:
M1 " la pièce provient de la machine M1"
M2 " la pièce provient de la machine M2"
M3 " la pièce provient de la machine M3"
D " la pièce est défectueuse"

Solution .2 *On a :*

P(M1)=20%=0.20 *P(M2)=50%=0.50* *P(M3)=30%=0.30*

$P(D/M1) = 0.05$ $P(D/M2) = 0.02$ $P(D/M3) = 0.01$

de plus, on a la propriété suivante : $P(\overline{E}/F) = 1 - P(E/F)$

ainsi $P(\overline{D}/M1) = 0.95$ $P(\overline{D}/M2) = 0.98$ $P(\overline{D}/M3) = 0.99$

1. *Quelle est la probabilité que la pièce choisie par le contrôleur soit défectueuse ie on cherche P(D)?*

   selon la formule des probabilités totales, on a:

$$\begin{aligned}
P(D) &= \sum_{i=1}^{3} P(D/Mi) \cdot P(Mi) \\
&= P(D/M1)P(M1) + P(D/M2)P(M2) + P(D/M3)P(M3) \\
&= 0.05 \times 0.2 + 0.02 \times 0.5 + 0.01 \times 0.3 \\
&= 0.023
\end{aligned}$$

2. *Quelle est la probabilité que la pièce provienne de la machine M1, sachant qu'elle est défectueuse ie on cherche P'(M1/D)?*

   selon la formule de Bayes, on a:

$$\begin{aligned}
P(M1/D) &= \frac{P(D/M1) \cdot P(M1)}{P(D)} \\
&= \frac{0.05 \times 02}{0.023} \\
&= 0.435
\end{aligned}$$

ainsi, si la pièce est défectueuse on aura 43.5% de chance qu'elle provienne de la machine M1.