Solutions des Excercices de la série de TD N° 3

Plasticité des poutres & charge limite

1 Exercice 1 :

- la rotule se formera au milieu à $x = L/2$
- Une rotule se développe avant la rupture. La charge maximale est donné par $F_r = -\frac{8M_p}{L^2}$.
- La flèche maximale vaut $-\frac{5pl^4}{384EI}$ (soit par intégration de l'équation de la courbure, ou par minimisation de l'énergie).

2 Exercice 2 :

- D'abord on calcul l'inconnue hyperstatique (par exemple en utilisant le théorème de minimisation de l'énergie complémentaire).

$$M(x) = R_b^1(l-x) + q\frac{(l-x)^2}{2}$$

(Attention les signes sont dans $q = -p\vec{y}$ et l'origine des abscisses se situe en A)

$$E_d^* = \frac{1}{2EI}\int_0^L M^2(x)dx$$

Tout calcul fait, ça donne $\frac{\partial E_d^*}{q} = 0 \Longrightarrow R_b^1 = \frac{3}{8}ql$
Le moment au niveau de l'encastrement est égale à $|M_A| = ql^2/8$
Le moment max dans la poutre se produit à $(x_0 = \frac{5}{8}l = 0.625)$, ce qui donne un moment $|M_b| < |M_A|$
Puisque $|M_A| > |M_B|$ donc la première rotule se forme en A, ce qui donne une charge égale à $p_1 = \frac{8M_p}{L^2}$

- Le système devient isostatique, avec un moment M_p à l'appui A. On calcul, le moment max au niveau de la poutre.

Ce moment se retrouve a une abscisse $x_1 = \frac{R_B^2}{q}$ (dérivée de $M(x_1) = R_b x - q\frac{x^2}{2}$,), donc la valeur de moment a cette abscisse est égale à

$$M(x_1) = R_b^2 x_1 - q\frac{x_1^2}{2}$$

La rotule apparait quand ce moment vaut $-M_p$, ce qui donne une charge (résolution d'une équation de second degrée)

$$|p_2| = \frac{6M_p + 4\sqrt{2}M_p}{l^2}$$

Cette charge est la charge de ruine de la structure.

- Pour le calcul de la flèche, on utilise l'équation de la courbure
-

$$y(x)'' = -\frac{M(x)}{EI}$$

On intègre deux fois cette équations, les constantes sont données par les Conditions aux limites. Le calcul des flèches à $x = L/2$, pour les deux phase donne

$$y_1 = \frac{1}{24}\frac{M_p l^2}{EI}$$

$$y_2 = -\frac{6 + 20\sqrt{2}}{384}\frac{M_p l^2}{EI}$$

Désormais, on peut tracer la courbe de capacité de la poutre (représentée par la courbe Force-Flèche au milieu).

- On décharge la poutre juste avant la rupture :

Pour décharger la poutre, cela revient à appliquer une charge égale à $F_r = -P_2$. La décharge est élastique, donc, on peut calculer les deux moments (encastrement et point x_1, attention on calcule les moments résiduels la ou les rotules se sont formés *point A* et $x_1 = \frac{R_b^1}{q}$, c'est bien R_b^1 qu'il faut utiliser), les moments sont donnés par

- $$M_A = -|P_2|\frac{L^2}{8}M_A^{'} = -\frac{(6+4\sqrt{2})M_p}{8}$$

- $$M_{x1} = -R_b^1 x1 + |P_2|\frac{x1^2}{2} = \frac{(R_b^1)^2}{2P_2}$$

- Au point A et B, nous avons déja obtenu la plastification, donc, les valeurs des moments sont égaux (en valeur absolu) à M_p, donc les moments résiduels sont donnés par

- $$M_r^A = M_p + M_A^{'} = 0.457M_p$$

- $$M_r^B = -M_p + M_B^{'} = 0.189M_p$$

- Une autre façon simple de déterminer les moments résiduels consiste à tracer dans l'espace le chemin de variation de M_a et M_{x1} et de chercher le point d'intersection de la courbe de décharge avec le courbe des autocontraintes. (voir cours)