

Introduction à l'analyse Limite

Analyse limite Plastique

Plastic Limit Analysis

- L'analyse limite plastique traite des méthodes de détermination des charges ultimes pour les systèmes structuraux en matériau élastique, idéalement plastique.
- L'analyse limite se fait sans connaître la loi de comportement du matériau (l'histoire de plastification ne nous intéresse pas !)
- Ces charges ultimes sont les états limites en plastique.

Exemples

- Calcul de la charge de ruine d'un treillis (voir Chapitre 1)
- Calcul de la charge de ruine des poutres en flexion (voir chapitre 2)
- L'analyse limite donne accès directement à la valeur de la charge de ruine sans passer par l'analyse incrémentale (comme dans le chapitre 1, 2 et 3)

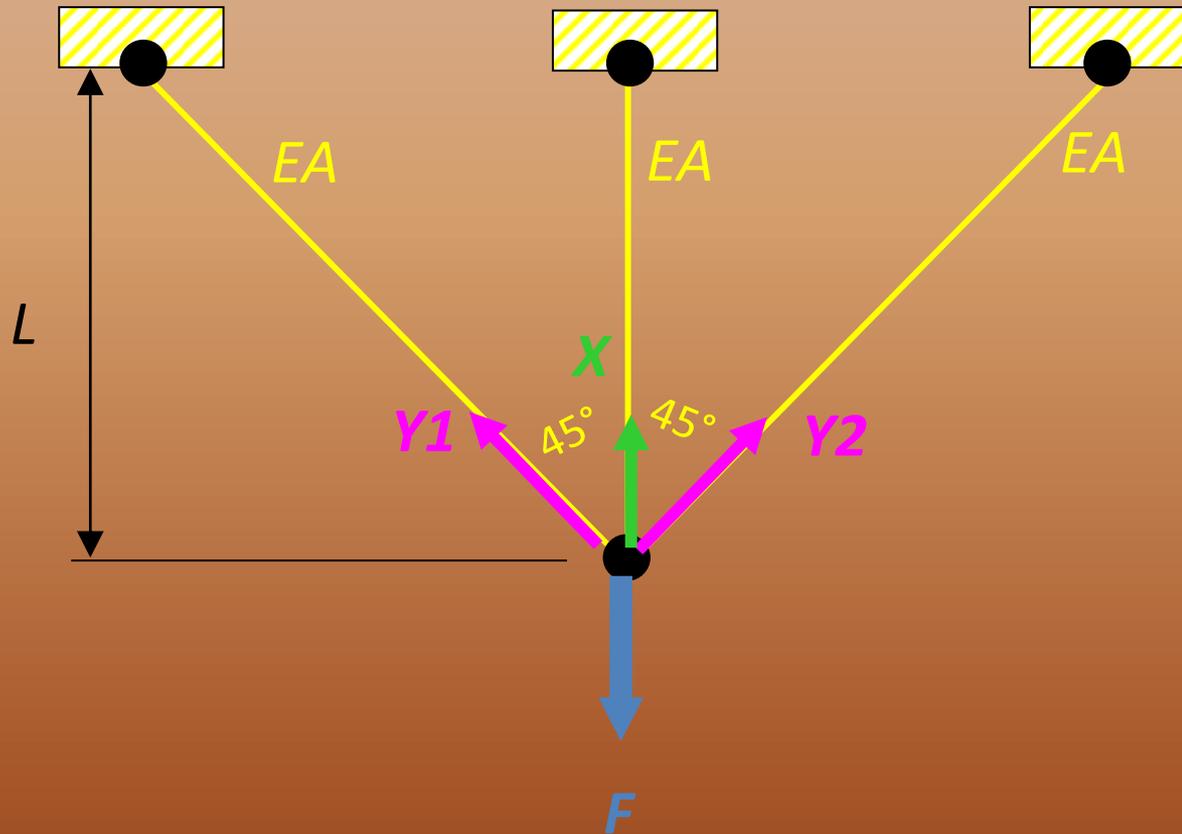
Méthodes d'analyse limite

- Méthodes Statique
- Méthode Cinématique

Méthode Statique

- Une charge calculée sur la base d'une distribution des éléments de réduction (moment, effort normal ..) dans laquelle la sollicitation ne dépasse nulle part sa valeur limite (M_p , N_p , ..) est égale ou inférieure à la charge d'effondrement réelle
- Le système doit être statiquement admissible
- Avec un exemple c'est plus simple !!

Treillis à trois barres (traité au chapitre 01 par la méthode incrémentale)
Objectif : trouver la charge limite sans passer par l'histoire de plastification



Equilibre selon XX $Y1=Y2=Y$

Equilibre Selon YY $X+2Y \sin 45^\circ = F$

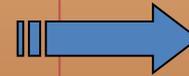
Systeme à trois barres

(on refait la solution par la méthode incrémentale pour rappel)

Systeme Hyperstatique

Equilibre : $X + 2Y \sin 45^\circ = F$

Minimisation de l'énergie: $X = 2Y$



$$X = \frac{2F}{2 + \sqrt{2}}$$

$$Y = \frac{F}{2 + \sqrt{2}}$$

$X > Y$ donc la barre verticale se plastifie en premier lieu quand $X = N_p = A\sigma_p$ (Effort normal de plastification)

$$F_e^{\max} = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} N_p$$

d'où : $Y = \frac{N_p}{2}$

$$\delta_e = \frac{N_p L}{EA}$$

- La 2ème barre ne peut plus contribuer à la reprise de des charges; seules les barres diagonales peuvent assurer ce rôle
- Equilibre : $X + 2Y \sin 45^\circ \equiv N_p + 2Y \sin 45^\circ = F$

$$Y = \frac{F - N_p}{\sqrt{2}}$$

- Les barres diagonales se plastifient à leur tour sous (symétrie)

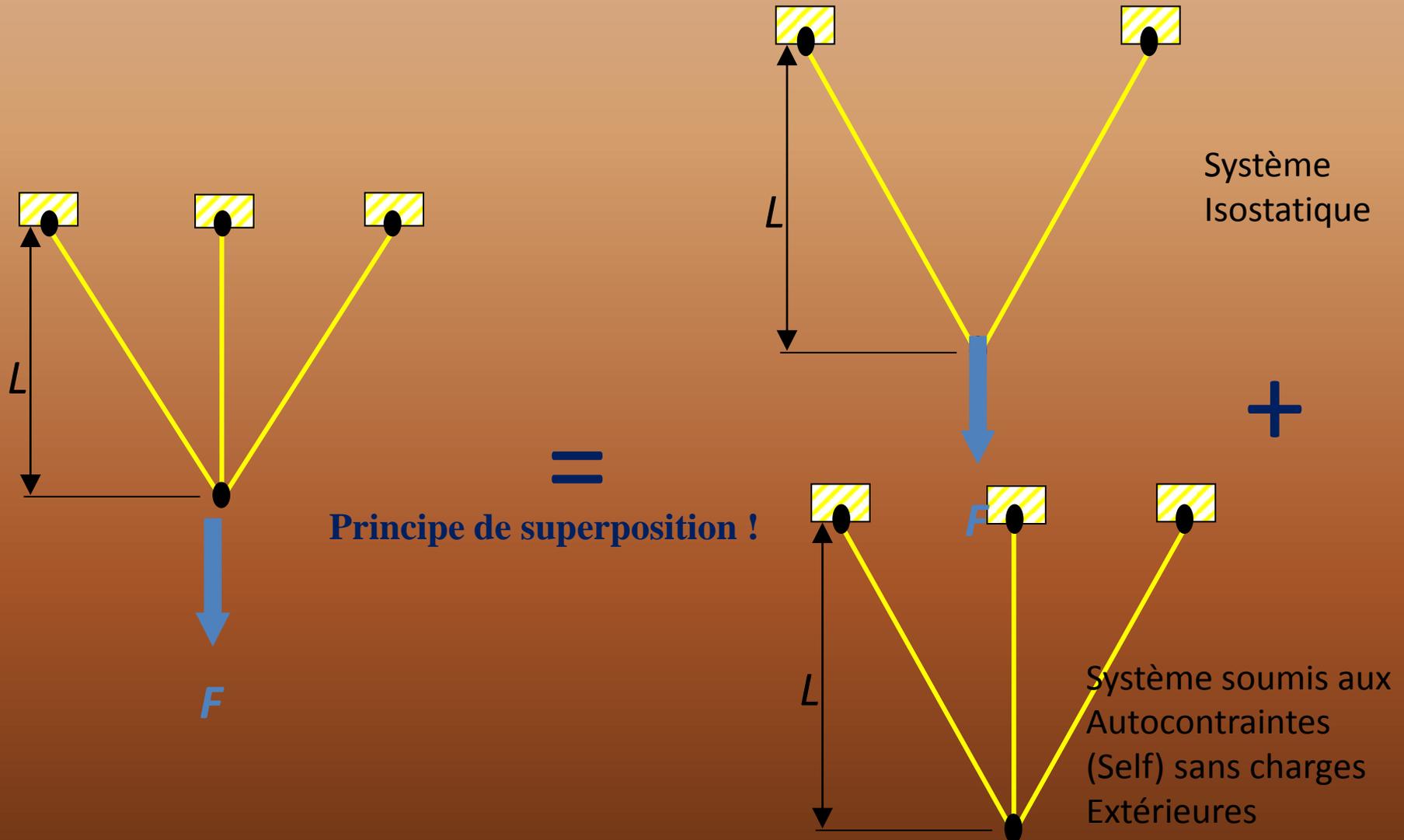
$$\begin{aligned} F_r &= (1 + \sqrt{2}) N_p \\ &= \sqrt{2} P_e^{\max} \end{aligned}$$

- La Force de ruine

$$F_r = (1 + \sqrt{2}) N_p$$

On recalcule la force de ruine avec l'Analyse limite

Méthode Statique



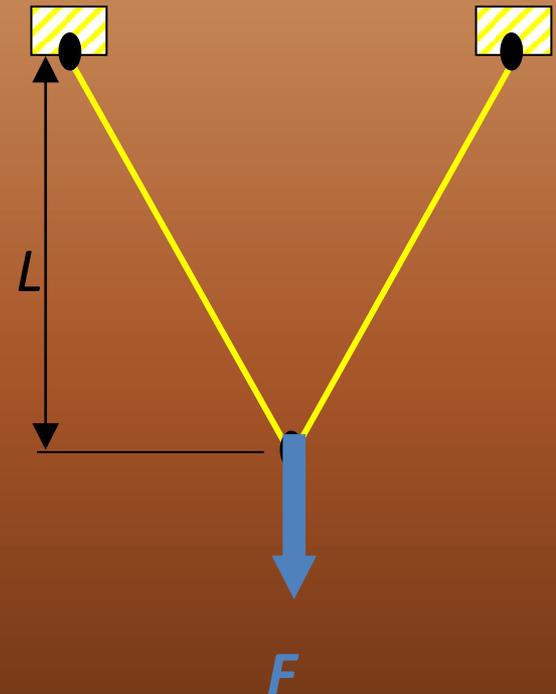
Equilibre du système ISOstatique

Equilibre Selon XX $N1=N3$

Equilibre Selon YY $2 * N1 * \sin 45^\circ = F$

$$N1 = F / \sqrt{2}$$

$N2=0$ Elle n'existe même pas !!

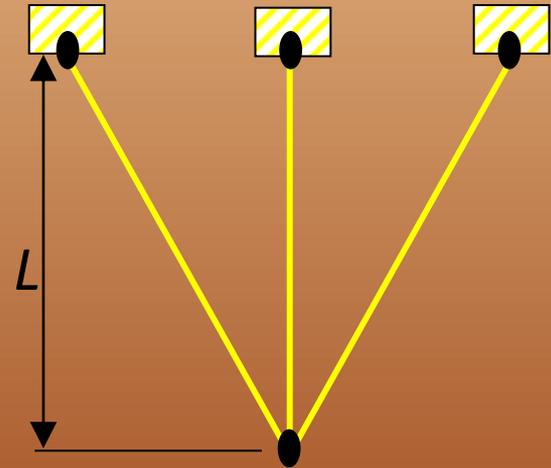


Equilibre du système Auto (sans charge extérieure !!)

Equilibre Selon XX $\tau_1 = \tau_3$

Equilibre Selon YY

$$2 * \tau_1 * \sin 45 + \tau_2 = 0$$

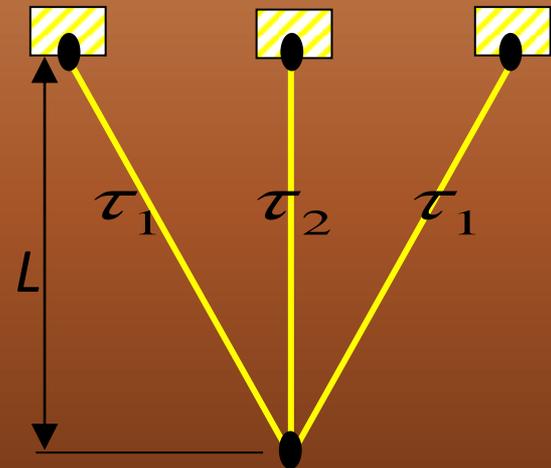


En terme d'équations, écrivons l'équilibre sur système complet

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix}^{Total} = \begin{Bmatrix} F / \sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix}^{Iso} + \begin{Bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{Bmatrix}^{Auto}$$

- L'équilibre du système « Auto » nous a donné (Equilibre Selon YY):

$$\tau_1 \sqrt{2} = -\tau_2$$



Systeme à résoudre

$$\begin{cases} N_1 = F / \sqrt{2} + \tau_1 \\ N_2 = \tau_2 \\ \tau_1 = -\tau_2 / \sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \bullet \text{ 3 inconnues } \\ \bullet \text{ 3 équations } \end{array} \quad \mathbf{F, \tau_1, \tau_2}$$

- Quand le système arrive à la rupture (à la limite), on sait que la barre 1 et 2 se plastifient (on ne cherche pas l'ordre de plastification des barres)

$$\begin{cases} N_p = F^r / \sqrt{2} + \tau_1 \\ N_p = \tau_2 \\ \tau_1 = -\tau_2 / \sqrt{2} \end{cases} \quad \longrightarrow \quad F^r = N_p (1 + \sqrt{2})$$

Méthode Statique : Récap

- On utilise le principe de superposition

ISO + Auto

- On écrit le système d'équation
- On se met à la rupture (la limite)
- On obtient directement F_r

A vous de jouer

Poutre hyperstatique degré 1

- Séparer le système en ISO+Auto
- Ecrire les équations d'équilibre pour chaque système
- Ecrire les équations d'équilibre su système complet
- Mettez vous à la rupture
- Déduire la charge de ruine

