- اختبارات الفروض
- الإحصاء الاستدلالي
- السنة الأولى ماستر
تخطيط وعمل وعلم الاجتماع التربوي

مقدمة

سوف نتناول فى هذا الفصل الجزء الثانى من الاستدلال الإحصائى وهو إختبارات الفروض.
يحاول الباحث اتخاذ قرار ما لمشكلة محددة بشأن خواص توزيع ما (المتوسط – النسبة) لعينة عشوائية تم سحبها من المجتمع "العينة المسحوبة لابد وأن تكون ممثلة تمثيلا جيدا للمجتمع محل الدراسة". ولكى نصل إلى قرار إحصائى لابد من وضع فروض عن خواص المجتمع، ومن هنا نختبر مدى صحة هذا الفرض من عدمه وذلك عن طريق العينة العشوائية التى تم سحبها من المجتمع.
وهذه الفروض هى مانطلق عليه الفروض الإحصائية Statistical Hypothesis.
وتنقسم اختبارات الفروض الإحصائية إلى قسمين:

أولا: اختبارات الفروض الإحصائية المعلمية: وفى هذا القسم يكون معلوم لدينا التوزيع الذى تتبعه البيانات التى لدينا وما إذا كان توزيعًا متصلاً أم منفصلاً (متقطعًا) ويكون المطلوب هو اختبار فروض حول معالم المجتمع.

ثانيا: اختبارات الفروض الإحصائية اللامعلمية: فى كثير من التجارب والأبحاث يكون لدينا بيانات واقعية يصعب من خلالها التعرف على التوزيع الذى تتبعة ومن هنا نشأت الحاجة إلى ما يعرف باختبارات الفروض اللامعلمية حيث لاتحتاج مثل هذه الاختبارات معرفة شكل التوزيع الذى تتبعه البيانات محل الدراسة، كما يفضل استخدامها عندما يكون حجم العينة المسحوبة من المجتمع صغيراً نسبيا. وسوف نهتم فى فصلنا هذا بالقسم الأول وهو اختبارات الفروض الإحصائية المعلمية.

٧–١ اختبارات الفروض الإحصائية المعلمية

Parametric Statistical Test of Hypothesis

عند القيام باختبار إحصائى يكون لدينا فرضان:

الفرض الأول: هو ما يسمى بفرض العدم Null Hypothesis وسوف نرمز له بالرمز H_o.

الفرض الثاني: يسمى بالفرض البديل Alternative Hypothesis ويرمز له بالرمز H_1.

وكما ذكرنا من قبل تعتمد اختبارات الفروض على بيانات العينة وفرض قيمة معينة لمعلمة من معالم المجتمع حيث يكون الاختبار: هل هناك فرق بين قيمة معلمة المجتمع المفروضة والقيمة المقدرة لها من خلال بيانات العينة؟ فإذا كان هناك فرق فهل يرجع هذا الفرق إلى خطأ المعاينة؟ أم هو فرق حقيقي "معنوي" Significant. فإذا كان الفرق معنويا فيكون القرار هو عدم قبول الفرض العدمي وعليه فإننا نقبل بالفرض البديل. أما إذا كان الفرق غير معنوى فإننا نقبل الفرض العدمي.

٧-٢ أنواع الأخطاء

الخطأ من النوع الأول α والخطأ من النوع الثانى β

$\alpha = 0{,}0\wedge$

إن أى قرار إحصائى يمكن أن ينتج عنه نوعان من الخطأ:

خطأ من النوع الأول: يحدث هذا النوع من الأخطاء عندما نقوم برفض الفرض العدمى H_o فى حين أنه صحيح، وذلك باحتمال مقداره α (وتسمى α بمستوى المعنوية وهى تأخذ قيم صغيرة (٠,٠١، ٠,٠٥، ...). $\alpha = 0{,}05$ 0,01 0,05

خطأ من النوع الثاني: يقع مثل هذا الخطأ عندما نقبل الفرض العدمى H_o فى حين أنه خطأ وذلك باحتمال مقدارة β.

ويمكن تلخيص القرارات الإحصائية بالجدول التالي:

الفرض \ القرار	قبول H_o	رفض H_o
H_o صحيح	قرار صحيح	خطأ من النوع الأول α
H_o خطأ	خطأ من النوع الثانى β	قرار صحيح

ولاختبار صحة فرض العدم H_o يجب أن نكون إحصاءة (دالة من مشاهدات العينة العشوائية) حيث يكون توزيع الإحصاءة معروف ويتم تقسيم المجال المقابل لهذه الدالة إلى قسمين (منطقتين):

المنطقة الأولى: تسمى منطقة القبول حيث يتم قبول الفرض العدمى ويكون احتمال حدوث قيم الإحصاءة (α -1) كبيرا.

المنطقة الثانية: تسمى منطقة الرفض حيث يتم رفض الفرض العدمى ويقبل الفرض البديل ويكون احتمال حدوث قيم الإحصاءة α صغيرا.

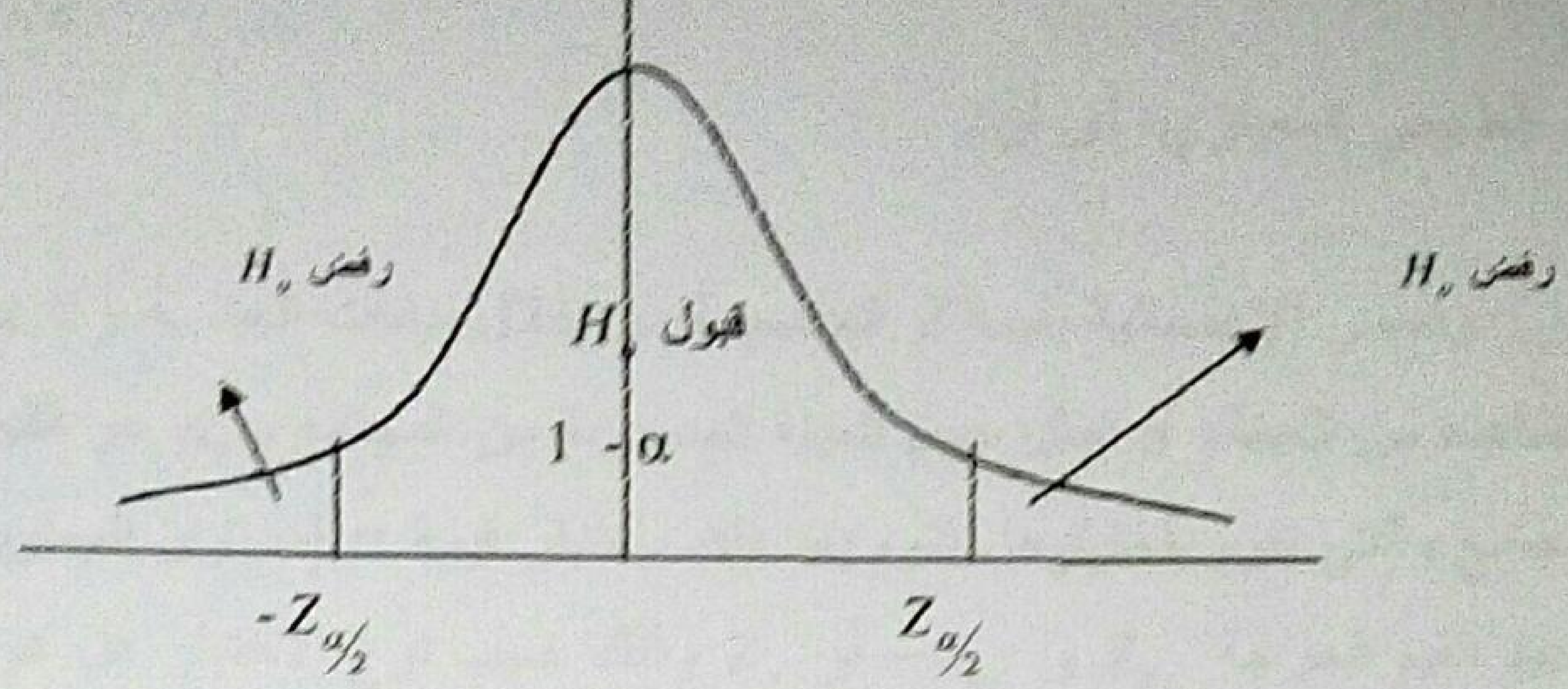
الأشكال التالية يمكن من خلالها توضيح مناطق الرفض والقبول وذلك حسب نوع الفرض البديل، وسوف نوضح ذلك باستخدام المتوسط μ (متوسط المجتمع) كالتالي:

متوسط المجتمع μ

١- الاختبار من طرفين: يسمى الاختبار الإحصائي اختباراً ذا طرفين إذا كان على الصورة:

$H_o: \mu = \mu_o$

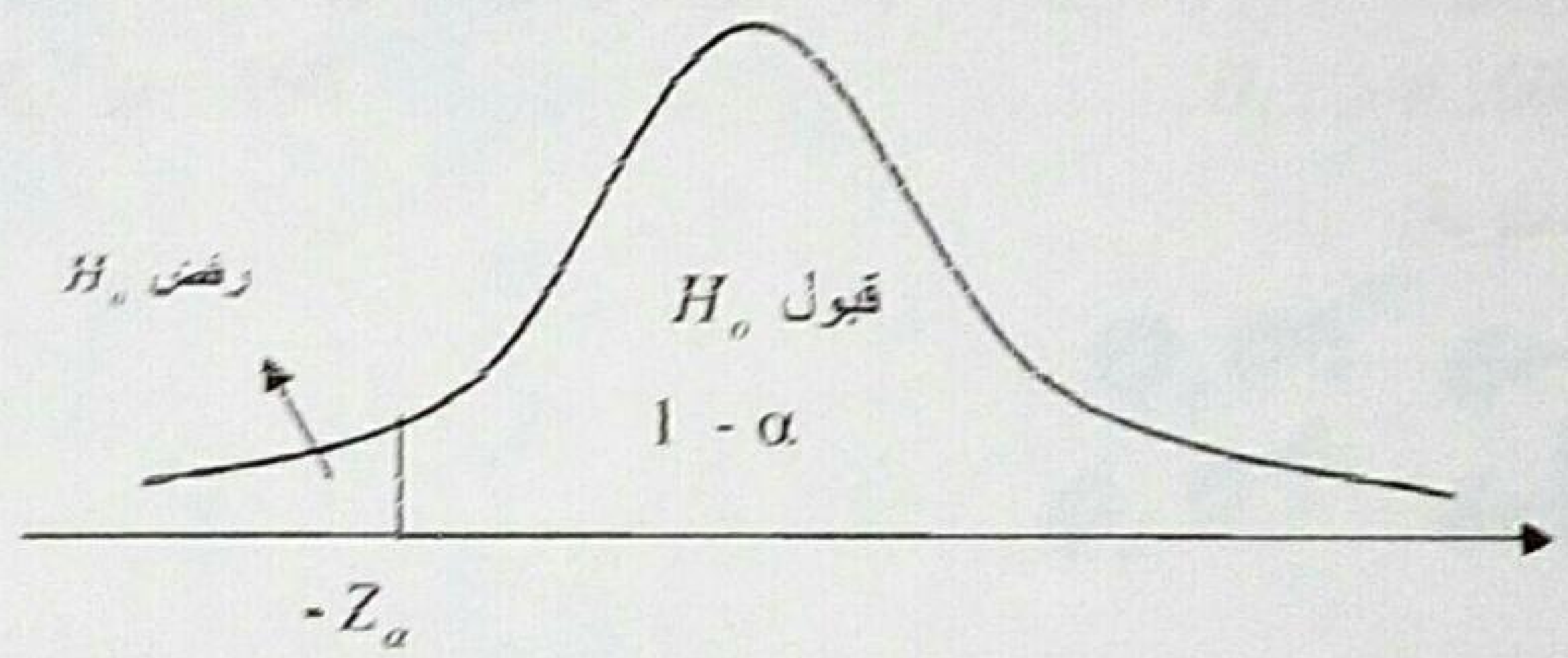
$H_1: \mu \neq \mu_o$



٢- الاختبار من طرف واحد أدنى: يسمى الاختبار الإحصائي اختباراً ذا طرف واحد أدنى إذا كان على الصورة:

$H_o: \mu = \mu_o$

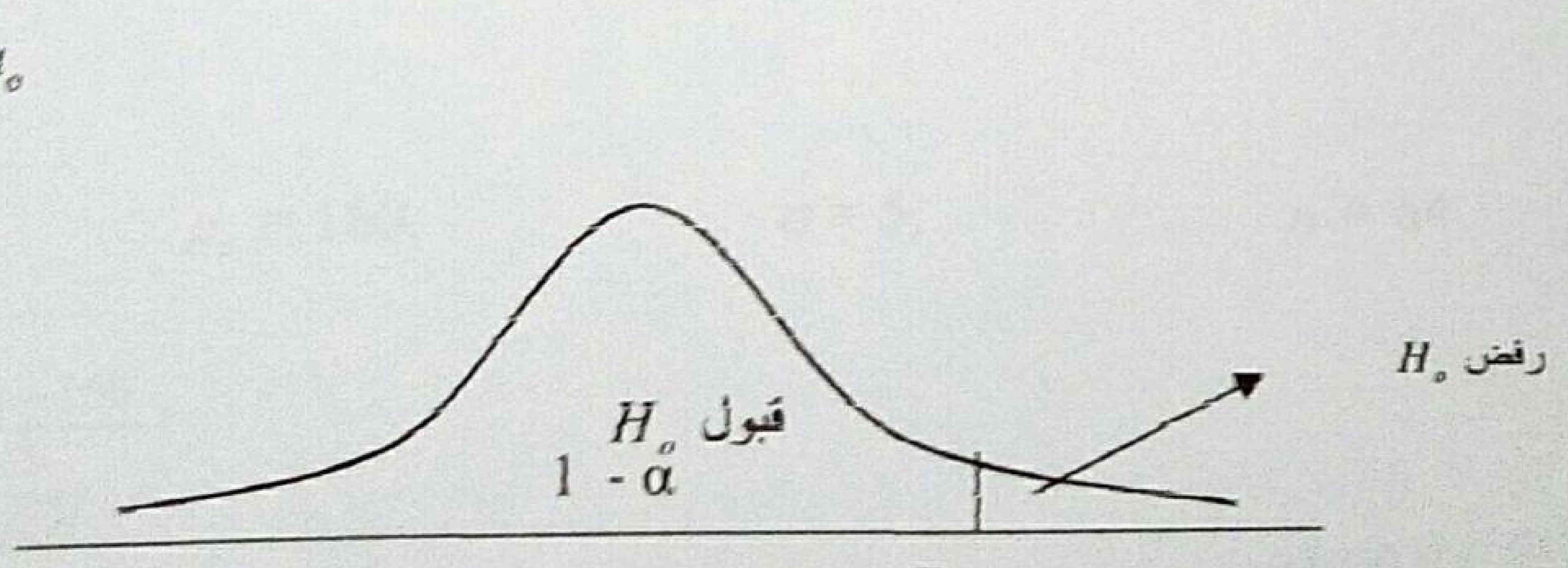
$H_1: \mu < \mu_o$



٣- الاختبار من طرف واحد أعلى: يسمى الاختبار الإحصائي اختباراً ذا طرف واحد أعلى إذا كان على الصورة:

$H_o: \mu = \mu_o$

$H_1: \mu > \mu_o$



٧-٣ اختبارات الفروض لمتوسط المجتمع μ

١- تباين المجتمع معلوم

عندما يكون الانحراف المعيارى σ للمجتمع معلوم فإن الإحصائية $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu_o}{\sigma/\sqrt{n}}$ يكون لها التوزيع الطبيعى المعياري، أى أن:

$$Z \sim N(0,1)$$

وتسمى الإحصائية بقيمة Z المحسوبة من خلال بيانات العينة و $\bar{x}$ يمثل متوسط البيانات المشاهدة من العينة، n تمثل حجم العينة المسحوبة من المجتمع و μ_o هو القيمة المفروضة لمتوسط المجتمع والتى نقوم باختبارها. نقوم بعد ذلك بإختيار قيمة α (مستوى المعنوية) حيث يتم على أساسة تحديد القيم الحرجة $Z_{\alpha/2}$ و $-Z_{\alpha/2}$ أو Z_α وذلك حسب نوع الاختبار هل هو اختبار من طرف واحد أم من طرفين، وسوف نوضح ذلك من خلال الأمثلة التالية:

155 سم = $\bar{x}$

64

مثال (١): أخذت عينة من ٦٤ طالب من إحدى المدارس فوجد أن متوسط الطول هو ١٥٥ سم. فإذا كان الانحراف المعيارى للمجتمع يساوى ٥ سم. اختبر الفرض القائل:

$$H_o: \mu = 160 \qquad , \qquad H_1: \mu \neq 160$$

وذلك عند مستوى معنوية:

أ- ٠,٠٥ ← 0,05

ب- ٠,٠١ ← 0,01

الحل:

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_o}{\sigma/\sqrt{n}}$$

حيث:

$\bar{x} = 155, \qquad \mu_o = 160, \qquad \sigma = 5, \qquad n = 64$

$\alpha = 0.05$

$$\Rightarrow Z = \frac{155 - 160}{\frac{5}{\sqrt{64}}},$$

$$Z = -8 \qquad (1)$$

وهذه تمثل قيمة Z المحسوبة.

أ- عند مستوى معنوية $(\alpha = 0.05)$ وبما أن الاختبار من طرفين إذا قيم Z الجدولية سوف تكون كالتالي:

$$\boxed{\begin{array}{l} Z_{\alpha/2} = Z_{0.05/2} = Z_{0.025} \\ Z_{0.025} = 1.96 \end{array}}$$

$Z_{\alpha/2} = Z_{0.05/2} = Z_{0.025}$

$Z_{0.025} = 1.96$

وعليه فإن قيمة $-Z_{\alpha/2}$ ستكون:

$$-Z_{\alpha/2} = -1.96$$

ومن هنا نجد أن قيمة Z المحسوبة أصغر من قيمة Z الجدولية، أى أن قيمة Z تقع فى منطقة الرفض، ومن هنا يتم رفض الفرض العدمى بأن $\mu = 160$.

ب- عند مستوى معنوية $(\alpha = 0.01)$ وبما أن الاختبار من طرفين إذا قيم Z الجدولية سوف تكون كالتالي:

$$\boxed{\begin{array}{l} Z_{\alpha/2} = Z_{0.01/2} = Z_{0.005} \\ Z_{0.005} = 2.58 \end{array}}$$

$Z_{\alpha/2} = Z_{0.01/2} = Z_{0.005}$

$Z_{0.005} = 2.58$

وعليه فإن قيمة $-Z_{\alpha/2}$ ستكون:

$$-Z_{\alpha/2} = -2.58$$

ومن هنا نجد أن قيمة Z المحسوبة أصغر من قيمة Z الجدولية، أى أن قيمة Z تقع فى منطقة الرفض، ومن هنا يتم رفض الفرض العدمى بأن $\mu = 160$.

$\sigma = 18$ غرام

مثال (٢): إذا كان أحد مصانع المواد الغذائية ينتج نوعا من الألبان حيث يصل متوسط وزن العبوة ٢٤٠ جرام، وذلك بانحراف معيارى ١٨ جرام حيث كانت أوزان العبوات تتبع التوزيع الطبيعي. تم أخذ عينة من ٩ عبوات وذلك عند إجراء اختبار الرقابة على الجودة فوجد أن متوسط وزن العبوة ٢٣٥ جرام. هل ترى أن هناك عيبا بالإنتاج مما أدى إلى انخفاض متوسط وزن العبوة؟ مستوى المعنوية ١٠%.

μ 240 غرام

$\bar{x}$ 235 غ

$n = 9$

$\alpha = 0.01$

الحل: ١- نضع فروض الاختبار وهى كالتالي:

$$H_o: \mu = 240$$
$$H_1: \mu < 240$$

٢- نقوم بحساب قيمة Z المحسوبة

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_o}{\sigma/\sqrt{n}}$$

حيث:

$\bar{x} = 235, \qquad \mu_o = 240, \qquad \sigma = 18, \qquad n = 9$

$\alpha = 0.01$

$$\Rightarrow Z = \frac{235-240}{\frac{18}{\sqrt{9}}},$$

$$Z = -0.83 \qquad (1)$$

وهذه تمثل قيمة Z المحسوبة.

٣- نقوم الأن بحساب قيمة Z الجدولية

عند مستوى معنوية $(\alpha = 0.1)$ وبما أن الاختبار من طرف واحد إذا قيمة Z الجدولية سوف تكون كالتالي:

$$-Z_\alpha = -Z_{0.1}$$

$$-Z_{0.1} = -1.28 \qquad (2)$$

$-Z_a = -Z_{0,1}$

$-Z_{0,1} = -1.28$

من (١) و (٢) نجد أن قيمة Z المحسوبة أصغر من قيمة Z الجدولية، أى أن قيمة Z تقع فى منطقة القبول، ومن هنا يتم قبول الفرض العدمى بأن $\mu = 240$.

درجات الحرية

إذا كان لينا مجتمع ما ونريد تقدير عدد من معالم هذا المجتمع كالمتوسط والانحراف المعيارى إلى آخره وتم سحب عينة من البيانات المستقلة التى تمثل ذلك المجتمع حجمها n فإن درجات الحرية التى يرمز لها بالرمز v تساوى حجم العينة مطروحا منه عدد المعالم المراد تقديرها ويمكن التعبير عن ذلك من خلال العلاقة التالية:

$$\boxed{v = n - k}$$

حيث k هى عدد المعالم المقدرة.

٢- تباين المجتمع مجهول وحجم العينة صغير

$30 > n$

عندما يكون الانحراف المعيارى للمجتمع مجهول وكذلك حجم العينة المسحوبة من ذلك المجتمع صغير (< ٣٠) فإن الإحصائية Z يتم تغيرها إلى الإحصائية t التى يكون لها الشكل التالي:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_o}{S/\sqrt{n}}$$

حيث S تمثل الانحراف المعيارى للعينة والإحصائية t تتبع توزيع t وذلك بدرجات حرية $(v = n-1)$ ومستوى معنوية α أو $\alpha/2$ حسب نوع الاختبار من طرف واحد أو طرفين، وسوف نوضح ذلك من خلال المثال التالي:

17 15

مثال (٣): إذا كان متوسط ربح سهم إحدى الشركات هو ١٥ جنيه فى العام الماضي. تم أخذ عينة من ٧ مساهمين عن توقعاتهم عن متوسط ربح السهم العام الحالى فوجد أنه ١٧ جنية بانحراف معيارى ٢. هل توافق المساهمين فى تقديرهم لارتفاع متوسط ربح السهم هذا العام؟ وذلك بمستوى معنوية ٥%.

$7 = n$ $S = 2$

الحل: ١- نضع فروض الاختبار وهى كالتالي:

$$H_o: \mu = 15$$
$$H_1: \mu > 15$$

٢- نقوم بحساب قيمة t المحسوبة

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_o}{S/\sqrt{n}}$$

حيث:

$\bar{x} = 17,\quad \mu_o = 15,\quad S = 2,\quad n = 7$

$\alpha = 0.05$

$$\Rightarrow t = \frac{17 - 15}{\frac{2}{\sqrt{7}}},$$

$$\boxed{t = 2.65} \qquad (1)$$

وهذه تمثل قيمة t المحسوبة.

٣- نقوم الآن بحساب قيمة t الجدولية.

عند مستوى معنوية $(\alpha = 0.05)$ وبما أن الاختبار من طرف واحد إذا قيمة t الجدولية سوف تكون كالتالي:

$$\boxed{\begin{aligned} t_{(n-1,\alpha)} &= t_{(7-1,0.05)} \\ t_{(6,0.05)} &= 1.943 \end{aligned}} \qquad (2)$$

$\Rightarrow t_{(n-1,\alpha)} = t_{(7-1,\,0,05)}$

$\Downarrow$ $t_{(6,0,05)} = 1,943$

من (١) و (٢) نجد أن قيمة t المحسوبة أكبر من قيمة t الجدولية، أى أن قيمة t تقع فى منطقة الرفض، ومن هنا يمكن القول بأننا نوافق المساهمين على توقعهم بارتفاع متوسط ربح السهم هذا العام.

٧-٤ إختبارات الفروض للفرق بين متوسطى مجتمعين

العينات الكبيرة المستقلة

هناك العديد من الأبحاث التى يكون المطلوب فيها المقارنة بين مجتمعين مختلفين أو منطقتين مختلفتين أو أسلوبين لتدريس مقرر ما...إلخ. من هنا جاء اختبار الفرق بين متوسطى المجتمعين عن

طريق سحب عينة من كل مجتمع ويكون الاختبار لنرى الفرق بين متوسطى العينتين، وهل هو فرق حقيقى أم يرجع هذا الفرق إلى الصدفة البحتة.

إذا كان متوسط العينة الأولى $\bar{x}_1$ ومتوسط العينة الثانية $\bar{x}_2$ بانحراف معيارى S_1 و S_2 على الترتيب وكان حجم العينة الأولى n_1 وحجم العينة الثانية n_2 فإن توزيع المعاينة للفرق $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ يقترب من التوزيع الطبيعى بمتوسط $\mu_1 - \mu_2$ وانحراف معيارى $\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$ حيث:

μ_1 هى متوسط المجتمع الأول و μ_2 متوسط المجتمع الثانى و $(\sigma_1^2 ، \sigma_2^2)$ يمثلان تباين المجتمع الأول والثانى على التوالي. ويكون فرض العدم والفرض البديل على الصورة:

$H_o: \mu_1 - \mu_2 = 0, \quad \Leftrightarrow \quad H_o: \mu_1 = \mu_2$

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2,$

or $H_1: \mu_1 < \mu_2,$

or $H_1: \mu_1 > \mu_2$

هذا وتأخذ الإحصاءة Z الشكل التالي:

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_o}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}$$

نلاحظ من شكل العلاقة السابقة أن $(\sigma_1^2 ، \sigma_2^2)$ مجهولتين، ولذا تم التعويض بتباين العينة الأولى وتباين العينة الثانية مع كبر حجم العينتين $(30 < n_1)$ و $(30 < n_2)$.

$30 < n_2 \quad 30 < n_1$

ولتوضيح ذلك نأخذ المثال التالي:

$n_2 = 85 \quad n_1 = 60$

مثال (٤): إذا اختيرت عينة عشوائية من ٦٠ طالب من جامعة خاصة، فوجد أن متوسط ذكائهم ٦٩ درجة وتباين قدرة ٢٣٠ درجة، كذلك تم اختيار عينة عشوائية أخرى من ٨٥ طالب من جامعة حلوان فوجد أن متوسط ذكائهم ٧٤ درجة وتباين قدرة ٢١٥ درجة. اختبر الفرض القائل بأن متوسط ذكاء طالب الجامعة الخاصة أقل من متوسط ذكاء طالب جامعة حلوان. وذلك بمستوى معنوية $(\alpha = 0.05)$.

$\bar{x}_1 = 69 \quad S_1^2 = 230 \quad \bar{x}_2 = 74 \quad S_2^2 = 215$

الحل: ١- نضع فروض الاختبار وهى كالتالي:

$H_o: \mu_1 = \mu_2$

$H_1: \mu_1 < \mu_2$

٢- نقوم بحساب قيمة Z المحسوبة

$$Z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_o}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

$$Z = \frac{(69 - 74) - 0}{\sqrt{\frac{230}{60} + \frac{215}{85}}}$$

$$Z = \frac{-5}{\sqrt{6.36}}$$

$Z = -1.98,$ (1)

٣- نقوم بحساب قيمة Z الجدولية

عند مستوى معنوية $(\alpha = 0.05)$ وبما أن الاختبار من طرف واحد إذا قيمة Z الجدولية سوف تكون كالتالي:

$$-Z_\alpha = -Z_{0.05}$$

$$-Z_{0.05} = -1.65 \quad (2)$$

$-Z_a = -Z_{0,05}$

$-Z_{0,05} = -1,65$

من (١) و (٢) نجد أن قيمة Z المحسوبة أصغر من قيمة Z الجدولية، أى أن قيمة Z تقع فى منطقة الرفض، ومن هنا يمكن القول بأن متوسط ذكاء طلبة الجامعة الخاصة أقل من متوسط ذكاء طلبة جامعة حلوان.

٢- العينات الصغيرة المستقلة

لقد وجد الإحصائيون أن الفرق بين المتوسطين $\bar{x}_1$ ، $\bar{x}_2$ عندما يكون حجم العينتين المستقلتين n_1 ، n_2 صغيرا وتباين المجتمع الأول والثانى مجهول فإن الإحصائية:

$$t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_o}{\sqrt{S_p^2(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

حيث:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

تتبع توزيع t بدرجات حرية $(\nu = n_1 + n_2 - 2)$. وسوف نوضح طريقة الاختبار تلك بالمثال التالي:

$n_2 = 6$ $n_1 = 11$ $S_1 = 7$ $\bar{X}_1 = 80$

مثال (٥): اختيرت عينة عشوائية من ١١ طالب من كلية التجارة جامعة القاهرة فوجد أن متوسط ذكائهم ٨٠ درجة بانحراف معيارى ٧ درجات. كذلك اختيرت عينة عشوائية من ٦ طلاب من كلية الآداب جامعة القاهرة أيضا فوجد أن متوسط ذكائهم ٧٥ درجة بانحراف معيارى ٥ درجات. هل يمكننا القول بأن متوسط ذكاء طلبة التجارة لا يساوى متوسط ذكاء طلبة الآداب وذلك عند مستوى معنوية ٥%

$S_2 = 5$ $\bar{X}_2 = 75$ $\alpha = 0,05$

الحل: ١- نضع فروض الاختبار وهى كالتالي:

$$H_o: \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

٢- نقوم بحساب قيمة S_p^2 كالآتي:

$$1\text{-}\ S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$$

$$S_p^2 = \frac{(11-1)(7)^2 + (6-1)(5)^2}{11+6-2}$$

$$S_p^2 = \frac{10\times 49 + 5\times 25}{15}$$

$$S_p^2 = 41 \qquad (1)$$

٣- نقوم بحساب قيمة t المحسوبة.

$$2\text{-}\ t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_o}{\sqrt{S_p^2(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$

$$t = \frac{(80-75)-0}{\sqrt{41(\frac{1}{11}+\frac{1}{6})}}$$

$$t = \frac{5}{\sqrt{10.56}}$$

$$t = 1.54 \qquad (2)$$

٤- نقوم الأن بحساب قيمة t الجدولية.

عند مستوى معنوية $(\alpha = 0.05)$ وبما أن الاختبار من طرفين فإن قـ يم t الجدولـيـ ـة سـ ـوف تكـ ـون كالتالي:

$t = (n_1 + n_2 - 2, \alpha/2)$

$$t_{(n_1+n_2-2,\alpha/2)} = t_{(11+6-2,0.025)}$$

$$t_{(15,0.025)} = \pm 2.131 \qquad (3)$$

① $t = (11+6-2)$

$\alpha/2 = \frac{0,05}{2}$

$= 0,025$

من (٢) و (٣) نجد أن قيمة t المحسوبة تقع بين قيم t الجدولية، أى أن قيمة t تقع فى منطقة القبول، أى أن متوسط ذكاء طلبة كلية التجارة مساو لمتوسط ذكاء طلبة كلية الآداب.وذلك عند مستوى معنوية ٥%.